N° D'ORDRE
5.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. CHEVILLIET.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — SUR L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DU CYLINDRE DROIT A BASE QUELCONQUE ET DE LA SPHÈRE, SOUMIS A L'ACTION DE LA PESANTEUR ET COMPRIMÉS ENTRE DEUX PLANS HORIZONTAUX.

THÈSE D'ASTRONOMIE. — SUR LE PROBLÈME INVERSE DES PERTURBATIONS.

Soutenues le 22 Janvier 1870, devant la Commission d'Examen.

MM. GOUILLAUD, *Président.*
RESAL,
E. MATHIEU, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1869

N° D'ORDRE

5.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. CHEVILLIET.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — SUR L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DU CYLINDRE DROIT A BASE QUELCONQUE ET DE LA SPHÈRE, SOUMIS A L'ACTION DE LA PESANTEUR ET COMPRIMÉS ENTRE DEUX PLANS HORIZONTAUX.

THÈSE D'ASTRONOMIE. — SUR LE PROBLÈME INVERSE DES PERTURBATIONS.

Soutenues le Janvier 1870, devant la Commission d'Examen.

MM. GOUILLAUD, *Président.*
RESAL,
E. MATHIEU, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1869

ACADÉMIE DE BESANÇON.

FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

DOYEN	M. GRENIER.	
PROFESSEURS HONORAIRES	MM. PERSON.	
	DELESSE.	
PROFESSEURS TITULAIRES	MM. GOUILLAUD...	Physique.
	REBOUL.....	Chimie.
	VÉZIAN.....	Géologie et Minéralogie.
	GRENIER.....	Zoologie et Botanique.
PROFESSEURS CHARGÉS DE COURS	MM. E. MATHIEU...	Mathématiques pures.
	RESAL.....	Mathématiques appliquées.
SECRÉTAIRE	M. PAPILLON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

A

M. B. CARESME,

RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE BESANÇON.

Hommage de reconnaissance et de respectueux attachement.

J. I. CHEVILLIET.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DU CYLINDRE DROIT A BASE QUELCONQUE ET DE LA SPHÈRE, SOUMIS A L'ACTION DE LA PESANTEUR, ET COMPRIMÉS ENTRE DEUX PLANS HORIZONTAUX.

J'étudie, dans ce travail, l'équilibre d'élasticité des solides isotropes les plus simples, savoir : le cylindre droit à base quelconque, et la sphère, comprimés entre deux plans horizontaux.

Dans les questions de ce genre, on cherche à satisfaire aux équations indéfinies relatives à tous les points de la masse du corps par des expressions renfermant assez de constantes arbitraires pour qu'on puisse identifier les forces élastiques à la surface avec les actions extérieures auxquelles elle est soumise.

Le plus difficile n'est pas d'intégrer les équations indéfinies, mais de déterminer les constantes de manière à vérifier les conditions aux limites. Pour la sphère, la question a été complétement résolue par M. Lamé (*); mais, pour le parallélépipède et le cylindre, on n'est encore parvenu à traiter que les cas particuliers les plus simples.

Quand on a trouvé des expressions satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé, on les regarde comme la solution la plus générale dont la question soit susceptible, parce qu'on admet, du moins implicitement, qu'un corps élastique soumis à des forces données n'a qu'une forme d'équilibre. Or cela n'est pas absolument vrai : il est clair, en effet, qu'une tige verticale, dont l'extrémité inférieure repose sur un

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* année 1854. — *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, p. 299-358.

plan horizontal et dont l'extrémité supérieure est chargée d'un poids, peut être en équilibre, sous l'action de ce poids, de diverses manières : d'abord en restant droite, puis étant courbée une, deux,..., un nombre quelconque de fois.

Mais la proposition est exacte, et on la démontre facilement, quand la déformation est assez faible pour que les équations différentielles se réduisent à la forme linéaire. Car si, après avoir trouvé pour les déplacements des molécules parallèlement aux axes coordonnés des valeurs u, v, w satisfaisant à toutes les conditions exigées, on substitue dans les équations les mêmes quantités augmentées respectivement de u', v', w', les forces données sont détruites partout par les u, v, w; de sorte que u', v', w' sont les déplacements des points d'un corps qui n'est soumis à aucune force, et nuls par conséquent.

Nous rencontrerons plus tard des faits qui sembleront contredire ce principe; nous trouverons des formes d'équilibre en nombre infini pour un même corps soumis à l'action des mêmes forces. Mais la contradiction ne sera qu'apparente; ces formes diverses ne différeront que de quantités de l'ordre de celles que nous aurons négligées dans nos calculs, et devront par conséquent être regardées comme identiques.

La première question dont je m'occuperai, celle de l'équilibre du cylindre droit, montrera comment on peut, à l'aide du raisonnement, déduire des calculs fort simples relatifs à un cas tout particulier des lois très-générales qu'on parviendrait sans doute difficilement à établir par une voie plus directe. Car cette question, quand on néglige la pesanteur, se résout au moyen des formules bien connues relatives à un parallélépipède rectangle dont les faces extérieures sont soumises à des forces normales constantes, égales sur les faces opposées, différentes pour les faces contiguës. Je commence par rappeler ces formules, puis je montre que les résultats auxquels elles conduisent, dans le cas où la pression est la même sur toute la surface latérale, s'étendent au cylyndre droit à base quelconque. Arrivé là, j'ai reconnu immédiatement que, si la pression est la même sur toute la surface, les lois obtenues pour le parallélépipède sont applicables à tous les corps, quelle que soit leur forme. J'ai ainsi trouvé, alors que je ne la cherchais plus, la démonstration rigoureuse d'une proposition célèbre admise depuis longtemps, mais sans preuve suffisante, par tous les physiciens.

Après cette courte digression, qu'on me pardonnera, je l'espère, j'examine les déformations produites par la pesanteur dans un cylindre droit dont la base inférieure est soumise, en tous ses points, à une même pression normale. Considérant d'abord le cylindre circulaire, j'essaye de satisfaire aux conditions du problème en prenant pour les expressions des déplacements des fonctions entières et rationnelles des coordonnées : j'y parviens sans avoir besoin de dépasser le second degré. Je trouve que les arêtes restent sensiblement droites; mais toutes les sections horizontales se courbent légèrement. Ces résultats s'étendent au cylindre droit à base quelconque.

Puisque la base cesse d'être plane, on voit que, quand le cylindre repose sur un plan inflexible, la pression qu'il exerce sur ce plan ne peut pas être la même en tous les points. Mais, les sections horizontales ayant toutes la même courbure dans le cas d'une pression uniforme, on pourrait croire que, si l'on distribue la pression de telle sorte que la base reste plane, il en sera de même de toutes les sections parallèles. Je prouve qu'il n'en est rien, si la pression exercée sur la surface latérale est nulle ou constante.

Ensuite, en assujettissant seulement la base inférieure à rester plane, je reconnais que les déplacements ne peuvent pas être représentés par des fonctions entières des coordonnées, même en prenant un nombre infini de termes. D'où il faut conclure que la loi de la déformation ne pourrait probablement être obtenue que par l'intégration directe des équations de l'élasticité en coordonnées cylindriques, problème qui dépasse les forces actuelles de l'analyse, au moins sous le rapport de la détermination des constantes introduites par l'intégration.

La seconde partie de mon travail, relative à la sphère, est une application des belles méthodes exposées par M. Lamé dans le Mémoire cité plus haut, où cet habile géomètre a résolu complétement la question de l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, quelles que soient les conditions relatives à la surface. Les mêmes méthodes ont été appliquées par M. Resal (*) à la recherche des conditions d'équi-

---

(*) Thèse présentée en 1855 à la Faculté des Sciences de Paris.

libre d'une croûte planétaire, sollicitée par les actions mutuelles de ses molécules et animée, en outre, d'un mouvement de rotation autour d'un diamètre. Le cas singulier que je considère, où la pression extérieure est nulle partout, excepté vers les extrémités du diamètre vertical, est analogue à celui que Poisson a traité (*) pour une verge élastique au milieu de laquelle est suspendu un poids.

Les résultats auxquels je suis conduit ne peuvent pas, comme ceux obtenus par Poisson et par M. Resal, s'exprimer en termes finis, ou du moins, si cette réduction est possible, je n'ai pas su la faire, excepté pour le volume de la sphère déformée. Tous les termes de la série qui représente ce volume sont nuls à partir du second.

Les séries auxquelles je parviens pour représenter le déplacement d'un point sont d'autant plus convergentes que ce point est plus rapproché du centre. Tant qu'on peut négliger les puissances supérieures du rapport $\frac{r}{r_1}$ vis-à-vis de la première, les lois de la déformation et de l'équilibre élastique sont très-simples; mais elles se compliquent de plus en plus à mesure qu'il faut conserver un plus grand nombre de ces puissances. Aux extrémités mêmes du diamètre vertical, les formules cessent d'être applicables, ce qui n'a rien qui doive étonner.

Le désir de trouver plus rapidement la somme d'une série dont les termes décroissent avec une extrême lenteur, et de remplacer par une série convergente une autre série qui cesse de l'être à la surface, m'a conduit à quelques théorèmes qui me paraissent assez intéressants.

J'ai cru devoir dire d'abord quelques mots de la dilatation linéaire dont la considération est de la plus grande importance dans la théorie de l'élasticité, puisque c'est elle qui amène la rupture quand elle dépasse certaines limites assignées par l'expérience. La représentation géométrique de cette dilatation rend évident, dans le cas de l'isotropie, ce théorème remarquable : « En tout point d'un milieu solide, il existe trois éléments plans rectangulaires entre eux, qui sont sollicités par des forces élastiques normales. » Il est facile de généraliser ensuite cette proposition.

(*) *Traité de Mécanique*, t. I, p. 638.

De la dilatation linéaire.

Considérons deux points infiniment voisins (x, y, z), (x', y', z'); si nous posons

$$h = x' - x, \quad k = y' - y, \quad l = z' - z,$$

leur distance r est donnée par la formule

$$r^2 = h^2 + k^2 + l^2.$$

Quand, par suite de la déformation, x, y, z prennent des accroissements u, v, w, h, k, l croissent de $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$. Or on a, par la série de Taylor,

$$\delta h = u' - u = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$\delta k = v' - v = \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$\delta l = w' - w = \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

en négligeant les puissances supérieures de h, k, l. Ces valeurs, substituées dans

$$r\delta r = h\delta h + k\delta k + l\delta l,$$

donnent

$$r\delta r = \frac{du}{dx} h^2 + \frac{dv}{dy} k^2 + \frac{dw}{dz} l^2 + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) kl + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) lh + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) hk.$$

Donc, en introduisant les angles α, β, γ de r avec les axes, définis par les formules

$$h = r\cos\alpha, \quad k = r\cos\beta, \quad l = r\cos\gamma,$$

on a, pour la dilatation linéaire,

$$\vartheta = \frac{\delta r}{r} = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

La loi de cette dilatation, pour toutes les directions qu'on peut considérer autour du point (x, y, z), est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. On voit que, si l'on pose

$$\pm\delta = \frac{1}{\rho^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\pm\delta}},$$

ρ, racine carrée de l'inverse de la valeur absolue de la dilatation linéaire, est le rayon vecteur d'une surface du second degré, qui a pour centre le point considéré.

Cette surface a trois axes principaux rectangulaires entre eux; si on les prend pour axes coordonnés, les rectangles disparaissent, c'est-à-dire que les sommes

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

sont nulles, et l'équation de la surface se réduit à

$$\frac{du}{dx}\xi^2 + \frac{dv}{dy}\eta^2 + \frac{dw}{dz}\zeta^2 = \pm 1, \tag{1}$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes.

Remarque. — Dans le cas de l'isotropie, les trois sommes qui sont nulles ne diffèrent que par un facteur constant des expressions des forces élastiques tangentielles qui s'exercent sur les éléments plans perpendiculaires aux axes coordonnés. Donc, il y a en chaque point trois éléments plans rectangulaires sollicités par des forces élastiques normales appelées *principales*. Quand les directions de ces trois forces principales sont prises pour axes, les trois composantes de la force élastique qui agit sur l'élément dont la normale fait avec les axes des angles ayant pour cosinus m, n, p, savoir :

$$\begin{aligned} X &= N_1 m + T_3 n + T_2 p, \\ Y &= T_3 m + N_2 n + T_1 p, \\ Z &= T_2 m + T_1 n + N_3 p, \end{aligned}$$

se réduisent à

$$(2) \qquad X = N_1 m, \quad Y = N_2 n, \quad Z = N_3 p,$$

d'où l'on tire

$$\frac{X^2}{N_1^2} + \frac{Y^2}{N_2^2} + \frac{Z^2}{N_3^2} = 1.$$

C'est là, ce me semble, une manière à la fois simple et naturelle d'établir l'existence des forces élastiques principales, et leur coïncidence avec les axes de l'ellipsoïde d'élasticité, lieu des extrémités des forces élastiques exercées sur les éléments plans qui passent par le point considéré. Il est facile de s'assurer ensuite que la proposition, ainsi reconnue évidente dans un cas particulier, est tout à fait générale.

Mais revenons à la surface qui représente la loi de la dilatation linéaire, et dont les axes sont dirigés, comme on le voit, suivant les forces élastiques principales, du moins quand le milieu est isotrope.

C'est un ellipsoïde si les trois dilatations principales, et par suite toutes les autres, sont de même signe.

Quand l'une des trois dilatations principales est de signe contraire aux deux autres, cette surface se compose de deux hyperboloïdes conjugués, l'un à une nappe, l'autre à deux, qui ont même cône asymptote,

$$\frac{du}{dx}\xi^2 + \frac{dv}{dy}\eta^2 + \frac{dw}{dz}\zeta^2 = 0.$$

Cherchons à reconnaître, dans ce cas, le signe de la dilatation linéaire correspondant à une direction donnée. Si cette dilatation

$$\delta = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{du}{dx}\xi^2 + \frac{dv}{dy}\eta^2 + \frac{dw}{dz}\zeta^2\right)$$

est positive, le point correspondant est sur la surface

$$\frac{du}{dx}\xi^2 + \frac{dv}{dy}\eta^2 + \frac{dw}{dz}\zeta^2 = 1;$$

or cette surface est un hyperboloïde à une nappe si deux dilatations

principales sont positives, et un hyperboloïde à deux nappes si deux sont négatives.

En général, la dilatation linéaire, dans une direction donnée, est de l'espèce qui est double parmi les dilatations principales, si la direction donnée rencontre l'hyperboloïde à une nappe, et, au contraire, de l'espèce qui est simple, si elle rencontre l'hyperboloïde à deux nappes.

Les valeurs des dilatations principales en fonction des forces élastiques principales A, B, C, s'obtiennent en résolvant les équations suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}, \\ A = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{du}{dx}, \\ B = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{dv}{dy}, \\ C = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Ce sont les formules connues qui expriment la dilatation cubique θ, et les composantes normales des forces élastiques relatives aux éléments plans perpendiculaires aux axes coordonnés en fonction des déplacements parallèles à ces axes.

On en tire d'abord

$$\theta = \frac{A + B + C}{3\lambda + 2\mu},$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(\lambda + \mu)A - \lambda(B + C)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{2(\lambda + \mu)B - \lambda(C + A)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$
$$\frac{dw}{dz} = \frac{2(\lambda + \mu)C - \lambda(A + B)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

On peut remarquer que, si la surface (1) est de révolution ou se réduit à une sphère, il en est de même de l'ellipsoïde d'élasticité, car les formules (3) montrent que $A = B$ lorsque $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$. Mais, quand l'el-

lipsoïde d'élasticité est de révolution, ou se réduit à une sphère, il n'en est pas toujours de même de cette surface, parce que les signes de A et B peuvent être différents.

Je dois rappeler ici, parce que j'en aurai besoin plus tard, que l'élément plan, sur lequel s'exerce la force élastique représentée par un rayon quelconque de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \tag{4}$$

est parallèle au plan tangent à l'extrémité du rayon correspondant de la surface

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm 1. \tag{5}$$

(Lamé, *Élasticité*, 5e Leçon.)

Équilibre d'un cylindre vertical pesant comprimé entre deux plans horizontaux.

Si les forces qui agissent sur toute la masse du corps se réduisent à la pesanteur, les équations de l'équilibre d'élasticité en coordonnées rectangulaires sont

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = \varpi. \end{cases} \tag{6}$$

ϖ désigne le poids spécifique du corps; les composantes normales N et tangentielles T des forces élastiques qui s'exercent sur les éléments plans perpendiculaires aux axes coordonnés sont définies par le tableau suivant

	x	y	z
x	N_1	T_3	T_2
y	T_3	N_2	T_1
z	T_2	T_1	N_3

qui fait connaître leur direction et celle de la normale à l'élément qu'elles sollicitent.

Ces diverses composantes sont liées à la dilatation cubique θ et aux déplacements u, v, w parallèles aux axes coordonnés par les relations

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \quad T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, \quad T_2 = \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, \quad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

Je conserverai, tant que je le pourrai, aux deux constantes λ et μ leur indépendance.

A cause de la forme linéaire de ces équations, les u, v, w peuvent se décomposer en deux parties : la première relative au cylindre simplement comprimé, et la seconde au cylindre simplement pesant. Le problème se scinde ainsi en deux.

Je vais d'abord résoudre le premier dans le cas particulier du parallélépipède rectangle : j'étendrai ensuite la solution au cylindre à base quelconque.

Équilibre du parallélépipède rectangle dont les faces sont soumises à des forces normales constantes.

Supposons l'origine au centre et essayons de satisfaire à toutes les équations en prenant pour u, v, w des polynômes algébriques. Nous voyons d'abord que u est une fonction impaire de x et paire de y et z. Si donc nous nous bornons d'abord aux termes qui ne dépassent pas le second degré, nous poserons simplement

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz;$$

ces valeurs rendent les forces tangentielles nulles partout et les forces normales constantes. Elle satisfont donc d'elles-mêmes aux équa-

tions (6), qui expriment l'équilibre de l'élément parallélépipédique. De plus, les trois constantes arbitraires qu'elles contiennent suffisent pour qu'on puisse identifier les composantes normales des forces élastiques aux efforts exercés à la surface. Il n'est donc pas nécessaire d'aller plus loin : la question est résolue.

Soient A, B, C les forces constantes appliquées aux faces du parallélépipède respectivement perpendiculaires aux axes des x, des y et des z, positives ou négatives suivant qu'elles représentent des tractions ou des pressions; on a, pour déterminer θ, a, b, c, les équations (3), que nous avons écrites plus haut en θ, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$; elles conduisent aux mêmes résultats.

L'ellipsoïde d'élasticité, identique en tous les points, est

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

Ses axes sont parallèles aux axes coordonnés; il en est de même de la surface (5), dont chaque plan tangent est parallèle à l'élément plan sur lequel s'exerce la force élastique représentée par le rayon de l'ellipsoïde d'élasticité, mené au point de contact, et la dilatation linéaire la même partout pour une même direction

$$\delta = a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma.$$

Si a, b, c sont de même signe, elle a toujours le signe commun; sinon elle change de signe quand la direction considérée passe d'un côté à l'autre du cône

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Les coordonnées du point (x, y, z) deviennent, après la déformation,

$$x' = (1+a)x, \quad y' = (1+b)y, \quad z' = (1+c)z;$$

ce qui montre que la déformation est *homographique*, c'est-à-dire que les droites, les plans qu'on imaginerait tracés dans l'intérieur du corps restent des droites, des plans, et plus généralement que le degré d'une

ligne, d'une surface tracée dans l'intérieur du solide ne change pas.

Mais comme elle n'est pas la plus générale des déformations homographiques, elle jouit de propriétés particulières : les droites, les plans qui étaient parallèles avant restent parallèles après, parce que les coefficients angulaires correspondants sont multipliés par les mêmes facteurs.

Toutefois ces droites et ces plans en restant parallèles ne conservent pas leur direction primitive, parce que les facteurs $1+a$, $1+b$, $1+c$, qui divisent les trois coefficients angulaires, sont en général différents; il n'y a que les droites parallèles aux axes et les plans parallèles aux plans coordonnés dont la direction ne change pas.

Les forces élastiques étant normales sur tous les éléments parallèles aux plans coordonnés et égales aux forces extérieures d'après les équations (4) et (5), tout noyau intérieur dont les faces sont parallèles à celles du solide se comporte comme s'il était directement sollicité par les efforts extérieurs. Il en est de même, sous les mêmes conditions, de toute enveloppe fermée ou non, quelle que soit la différence d'épaisseur des parois.

Mais cela ne serait plus vrai si les faces du noyau de l'enveloppe n'étaient pas parallèles à celles du parallélépipède, parce que l'ellipsoïde d'élasticité ayant ses axes inégaux, les forces élastiques qui s'exercent sur les éléments non parallèles aux axes coordonnés ne sont pas normales, mais obliques.

Cas particulier où la pression est la même sur toutes les faces latérales. — Alors $b = a$; la dilatation linéaire

$$\delta = a + (c - a)\cos^2\gamma$$

est la même pour toutes les directions qui font le même angle avec l'axe des z. Ainsi une ligne tracée dans le plan d'une section horizontale reste semblable à elle-même et semblablement placée par rapport au centre supposé fixe. Cela est du reste facile à voir sans cette formule; car la droite qui joint le centre de la section à un point quelconque de son plan conserve sa direction et croît proportionnellement à sa longueur, comme diagonale d'un rectangle dont les côtés sont multipliés par un même facteur $1+a$.

L'ellipsoïde d'élasticité (4) est de révolution autour de son axe vertical, ainsi que la surface (5), et par conséquent tous les éléments plans parallèles à l'axe des z sont sollicités par des forces normales égales à celle qui agit sur toute la surface latérale. Donc :

Extension au cylindre droit à base quelconque. — Un noyau cylindrique plein ou creux, dont les génératrices sont verticales, et les bases, quelconques d'ailleurs, horizontales, se déforme de telle sorte que la surface latérale reste semblable à elle-même et semblablement placée par rapport à une verticale quelconque invariablement liée avec lui, qu'on supposerait fixe. Et il se comporte de la même manière que si la surface latérale et les bases étaient soumises directement aux forces extérieures, c'est-à-dire que les lois de déformation du parallélépipède rectangle s'appliquent dans ce cas au cylindre droit à base quelconque, ce qu'il serait sans doute difficile d'établir directement.

Dans la question que nous avons particulièrement en vue, les efforts latéraux sont nuls; et si l'on désigne par Q la valeur absolue de la pression à laquelle les bases sont soumises, on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -Q,$$

$$a = b = \frac{\lambda Q}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

$$c = \frac{-(\lambda + \mu)Q}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = -2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)a,$$

$$\theta = \frac{-Q}{3\lambda + 2\mu}.$$

La dilatation linéaire

$$\delta = a\left[1 - \left(3 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)\cos^2\gamma\right]$$

négative et égale à $-c$ pour $\gamma = 0$; elle décroît en valeur absolue, puis devient positive et croissante jusqu'à la valeur a qu'elle atteint pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Le changement de signe a lieu quand la direction considérée passe d'un côté à l'autre du cône défini par la relation

$$\cos^2\gamma = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}.$$

Si $\lambda = \mu$, comme dans l'ancienne théorie,

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{5}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 63^\circ 26' \text{ environ.}$$

Si $\lambda = 2\mu$, comme certaines expériences de Wertheim paraissent l'exiger,

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 60^\circ \text{ exactement.}$$

Le rapport de la contraction suivant l'axe des z à la dilatation dans le sens perpendiculaire

$$-\frac{c}{a} = 2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right),$$

c'est-à-dire 4 dans la première hypothèse, et 3 dans la seconde.

L'ellipsoïde d'élasticité se réduit à une droite parallèle à l'axe des z, la force élastique exercée sur tous les éléments est parallèle à cette droite, et son intensité donnée par les équations (2) est

$$Z = -Q\cos\gamma.$$

Cas où la pression est la même sur toutes les faces. — Ce cas conduit à des conséquences encore plus remarquables que le précédent. Alors on a $a = b = c$; le solide reste semblable à lui-même et semblablement placé par rapport au centre supposé fixe. Il en est de même de toute ligne, de toute surface tracée dans l'intérieur, le rayon vecteur de chaque point conservant sa direction et variant proportionnellement à sa longueur comme diagonale du parallélépipède de ses coordonnées, qui sont multipliées par le même facteur $1 + a$. Cela s'applique à tout noyau intérieur plein ou creux, terminé par des surfaces de forme quelconque, continues ou discontinues.

Et comme l'ellipsoïde d'élasticité (4) se réduit à une sphère, ainsi que la surface (5), tous les éléments plans sont sollicités par une force normale égale à celle qui agit sur toute la surface extérieure. Donc le noyau est dans la même situation que s'il était isolé, et tous les points de sa surface soumis à la même force normale.

Ainsi se trouve établie rigoureusement, au moyen des principes les plus élémentaires de la théorie de l'élasticité, une proposition très-gé-

nérale admise depuis longtemps, mais sans preuve suffisante (*) par tous les physiciens. Dans toutes les démonstrations que je connais, on suppose gratuitement que, si tous les points de la surface extérieure d'un solide de forme quelconque sont soumis à une même pression normale, la force élastique exercée sur un élément plan quelconque de la masse intérieure n'a pas de composante tangentielle. Je viens de mettre hors de doute la légitimité de cette supposition.

Je vais étudier maintenant les déformations produites par l'action de la pesanteur.

Équilibre d'un cylindre vertical pesant, dont tous les points de la base supportent des pressions égales.

La solution générale peut se déduire également du cas du parallélépipède rectangle et de celui du cylindre circulaire; je choisis la seconde manière pour n'avoir à considérer que deux coordonnées r et z, puisque chaque point reste évidemment dans le méridien où il se trouve.

Les équations du problème sont (*voir* LAMÉ, *Élasticité*, 14e Leçon)

$$(7)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dr}-\mu\dfrac{d\zeta}{dz}=0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\dfrac{\mu}{r}\dfrac{dr\zeta}{dr}=\varpi, \\ \zeta=\dfrac{dw}{dr}-\dfrac{du}{dz}, \\ \theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{dru}{dr}+\dfrac{dw}{dz}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1=\lambda\theta+2\mu\dfrac{du}{dr}, \quad \Phi_3=Z_2=0, \\ \Phi_2=\lambda\theta+2\mu\dfrac{u}{r}, \quad Z_1=R_3=\mu\left(\dfrac{dw}{dr}+\dfrac{du}{dz}\right), \\ Z_3=\lambda\theta+2\mu\dfrac{dw}{dz}, \quad R_2=\Phi_1=0. \end{cases}$$

(*) *Voir* la démonstration qu'en donnent MM. Sturm et Colladon, dans le Mémoire qui a remporté en 1829 le grand prix de Mathématiques. (*Mémoires des Savants étrangers* et *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVI, p. 128.)

Dans les premiers membres des six dernières, les lettres se rapportent, comme toujours, aux directions des composantes, et les indices aux éléments sur lesquels elles s'exercent. On voit déjà qu'il ne peut y avoir de forces tangentielles que sur les éléments perpendiculaires au rayon suivant l'arête, et sur les éléments parallèles à la base suivant le rayon.

Les équations aux limites s'obtiendront en écrivant que les diverses composantes des forces élastiques sont nulles à la surface, excepté la valeur de Z_3 relative à la base inférieure qui doit être égale à ϖh, h étant la hauteur du cylindre.

Si l'on cherche à satisfaire à toutes ces équations en prenant pour u et w des fonctions entières et rationnelles du second degré en r et z, on trouve facilement, par la méthode des coefficients indéterminés, en supposant l'origine placée au centre de la base inférieure,

$$u = ar(h - z),$$
$$w = \frac{ar^2}{2} - bz(2h - z),$$

en posant, pour abréger,

$$a = \frac{\lambda\varpi}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$
$$b = \frac{(\lambda + \mu)\varpi}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)a.$$

Par conséquent, les nouvelles coordonnées du point (r, z)

$$r' = r + u, \quad z' = z + w$$

ont pour expressions

$$r' = r\left[1 + a(h - z)\right],$$
$$z' = z\left[1 - b(2h - z)\right] + \frac{ar^2}{2};$$

a et b sont des quantités très-petites dont on peut négliger les carrés et le produit. Il en résulte que la verticale située à la distance r de

l'axe des z a maintenant pour équation

$$r' = r[1 + a(h - z')],$$

c'est-à-dire qu'elle reste sensiblement droite, mais qu'elle cesse d'être verticale.

Pour $z' = h$, on a $r' = r$; de sorte que le point où la droite perce la base supérieure du cylindre reste à la même distance de l'axe.

Le point où elle rencontre l'axe a pour ordonnée

$$z' = h + \frac{1}{a},$$

quantité indépendante de r, c'est-à-dire que toutes les lignes primitivement verticales rencontrent l'axe sensiblement au même point, de sorte que le cylindre est devenu un tronc de cône dont les bases sont courbes, comme nous allons le voir.

La section horizontale située à la distance z de la base inférieure a maintenant pour équation

$$z' = z[1 - b(2h - z)] + \frac{ar'^2}{2};$$

elle a donc pris la forme d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z. Le paramètre $\frac{2}{a}$ de ce paraboloïde est le même pour toutes les sections horizontales.

La dilatation cubique

$$\theta = -\frac{2\mu a}{\lambda}(h - z)$$

est la même en tous les points de chaque section horizontale; partout négative, elle croît en valeur absolue depuis la base supérieure, où elle est nulle, proportionnellement à la distance à cette base.

La dilatation linéaire

$$\delta = a(h - z)\left[1 - \left(3 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)\cos^2\gamma\right],$$

indépendante de la distance à l'axe, croît en valeur absolue propor-

tionnellement à la distance du point considéré à la base supérieure du cylindre; elle est positive dans le sens du rayon, négative dans le sens de la hauteur, et change de signe pour la valeur de γ que nous avons calculée à propos du cylindre simplement comprimé.

L'ellipsoïde d'élasticité se réduit encore à une droite parallèle à l'axe des z, etc.

Extension au cylindre droit à base quelconque. — Les valeurs que nous avons trouvées pour u et w réduisent à zéro toutes les composantes des forces élastiques, excepté celle qui agit sur l'élément parallèle à la base, suivant l'arête, et qui a pour expression

$$Z_3 = -\varpi(h - z).$$

Il en résulte que, si l'on découpe dans le cylindre circulaire un autre cylindre vertical de même hauteur, mais de base quelconque, la surface latérale de ce cylindre ne supportant aucune pression, il est absolument dans la même situation que s'il était isolé, et tous les points de sa base inférieure soumis à la pression ϖh; il se déforme donc de la même manière.

Mais les sections horizontales prennent, comme nous l'avons vu, la forme d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z, surface qui n'est pas partout identique à elle-même. Nous aurons donc, pour un même noyau cylindrique soumis aux mêmes forces, diverses formes d'équilibre, en le supposant placé à des distances différentes de l'axe. C'est la difficulté que nous avons signalée dans l'Introduction; elle disparaîtra immédiatement si nous faisons voir qu'aux quantités près de l'ordre de celles que nous devons négliger, les paraboloïdes égaux que nous avons trouvés pour la forme des diverses sections horizontales peuvent être remplacés par des sphères tangentes ayant pour centre commun le point de concours des arêtes du cylindre déformé.

En effet, une pareille sphère a pour équation

$$r^2 = z(2R - z),$$

en plaçant l'origine au point le plus bas et désignant pour un moment le rayon par R. La plus petite des ordonnées qui correspondent à

l'abscisse r, développée en série, a pour expression

$$z = \frac{r^2}{2R} + \frac{r^4}{8R^3} + \dots,$$

et comme

$$R = k + \frac{1}{a},$$

k étant la distance de la section considérée à la base supérieure du cylindre, d'où

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{1 + ka} = a(1 - ka) = a,$$

aux quantités près de l'ordre de a^2, on a, au même degré d'approximation, l'ordonnée de la sphère

$$z = \frac{ar^2}{2},$$

comme celle du paraboloïde.

L'analyse précédente montrant que les sections horizontales se courbent nécessairement si la pression est la même sur toute l'étendue de la base inférieure, on voit que cette hypothèse est inadmissible quand le cylindre repose sur un plan inflexible.

Mais comme toutes les sections horizontales ont la même courbure, on peut se demander si, en répartissant la pression sur la base inférieure, de telle sorte qu'elle reste plane, il en sera de même de toutes les sections parallèles. Nous allons examiner si cela est possible.

Toutes les sections horizontales peuvent-elles rester planes? — Il faut, pour cela, que w soit indépendant de r ou que $\frac{dw}{dr} = 0$, alors

$$\zeta = -\frac{du}{dz}, \quad \frac{1}{r}\frac{dr\zeta}{dz} = -\frac{d\frac{1}{r}\frac{dru}{dr}}{dz}.$$

En conséquence, si l'on a en outre égard à la valeur de θ, la seconde des équations (7) peut s'écrire

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \frac{d^2w}{dz^2} = \varpi.$$

On en conclut que $\frac{d\theta}{dz}$ est indépendant de r. Donc

$$\theta = Z + R,$$

où Z ne dépend pas de r, ni R de z. D'après cela $\frac{d\theta}{dr}$ est fonction de r seulement, et l'équation

$$\frac{1}{r}\frac{dr\frac{d\theta}{dr}}{dr} + \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0,$$

qui résulte de l'élimination de ζ entre les deux premières équations (7), se décompose en deux

$$\frac{1}{r}\frac{dr\frac{d\theta}{dr}}{dr} = -\frac{d^2\theta}{dz^2} = \text{const.},$$

puisque la valeur commune des deux premiers membres ne dépend ni de r qui n'entre pas dans le second, ni de z qui n'entre pas dans le premier. On en tire facilement, en ayant égard aux conditions précédentes,

$$\theta = a(r^2 - 2z^2) + bz + c.lr + d,$$

a, b, c, d étant des constantes arbitraires. D'où l'on déduit, par un calcul semblable,

$$\mu\zeta = [\varpi + (\lambda + 2\mu)(4az - b)]\frac{r}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)cz + k}{r},$$

k désignant une nouvelle constante. Or

$$-\mu\zeta = \mu\frac{du}{dz} = R_3 = Z_1;$$

par suite, la condition que les forces tangentielles soient nulles à la surface donne

$$a = 0, \quad b = \frac{\varpi}{\lambda + 2\mu}, \quad c = 0, \quad k = 0,$$

d'où il résulte qu'elles sont nulles partout.

Les valeurs de u et w, déduites de

$$\frac{du}{dz} = 0,$$
$$\frac{dw}{dz} = \theta - \frac{1}{r}\frac{dru}{ar},$$
$$\theta = bz + d,$$

savoir :

$$u = mr + \frac{n}{r},$$
$$w = \frac{bz^2}{2} + (d - 2m)z,$$

donnent

$$R_1 = \lambda(bz + d) + 2\mu\left(m - \frac{n}{r^2}\right),$$
$$Z_3 = (\lambda + 2\mu)(bz + d) - 4\mu m;$$

et comme b n'est pas nul tant que le cylindre est pesant, on voit que les sections horizontales ne peuvent pas rester planes, à moins que l'on n'exerce sur la surface latérale une pression variable avec la hauteur dont il est facile de trouver la loi. Si l'on assujettit Z_3 et R_1 à être nuls pour tous les points de sa base supérieure

$$m = 0, \quad n = 0, \quad bh + d = 0,$$

et par conséquent

$$u = 0, \quad w = \frac{bz(z - 2h)}{2} = \frac{\varpi z(z - 2h)}{2(\lambda + 2\mu)},$$
$$\theta = b(z - h) = \frac{\varpi(z - h)}{\lambda + 2\mu},$$
$$R_1 = \Phi_2 = \lambda b(z - h) = \frac{\lambda\varpi(z - h)}{\lambda + 2\mu},$$
$$Z_3 = \varpi(z - h).$$

Puisqu'il est impossible que toutes les sections horizontales restent planes, cherchons si l'on pourra du moins trouver pour u et w des expressions entières en r et z, qui permettent d'assujettir la base inférieure à cette condition.

Si la base inférieure est assujettie à rester plane, u et w peuvent-ils être représentés par des fonctions entières des coordonnées? — Pour que la base inférieure reste plane, il faut que tous les termes de w admettent le facteur z. Posons donc

$$w = \mathrm{P}z,$$

P étant un polynôme en r et z. La condition que

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{R}_3 = \mu\left(\frac{dw}{dr} + \frac{du}{dz}\right) = \mu\left(z\frac{d\mathrm{P}}{dr} + \frac{du}{dz}\right)$$

soit nul, quel que soit r, pour $z = 0$, exige que

$$\frac{du}{dz} = \mathrm{Q}z,$$

Q étant un autre polynôme. Alors l'équation

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dz} + \frac{\mu}{r}\frac{dr\zeta}{dr} = \varpi$$

peut s'écrire

$$(\lambda + 2\mu)\left[\mathrm{Q}z + 2r\frac{d\mathrm{P}}{dz} + rz\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dr} + \frac{d^2\mathrm{P}}{dz^2}\right)\right] + \mu r\left(\frac{d\mathrm{P}}{dr} - \mathrm{Q}\right) + \mu rz\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dr^2} - \frac{d\mathrm{Q}}{dr}\right) = \varpi r.$$

Or cette relation, qui doit être une identité, ne contient aucun terme en r seul, qu'on puisse identifier avec le second membre, à moins qu'il n'y ait dans $\frac{d\mathrm{P}}{dz}$ un terme constant égal à $\frac{\varpi}{2(\lambda + 2\mu)}$, et alors w contient un terme en z^2, qui n'est pas nul. Il y a donc dans θ, et par suite dans R_1, un terme en z qui ne peut être détruit par aucun autre : car $\frac{du}{dz}$ ayant z en facteur, il n'y a dans u, et par conséquent dans $\frac{du}{dr}$, aucun terme du premier degré en z.

Donc il est impossible que la valeur de R_1 soit nulle ou constante pour tous les points de la surface latérale.

Ainsi quand le cylindre pesant repose sur un plan inflexible, les déplacements moléculaires dus à l'élasticité ne peuvent pas être représentés par des expressions entières en r et z, ni même par des fonctions développables en série, suivant les puissances entières et positives de ces variables. Pour les obtenir, il faudrait donc probablement recourir à l'intégration directe qui dépasse les forces actuelles de l'analyse, du moins sous le rapport de la détermination des constantes.

Je vais maintenant essayer de résoudre, dans le cas de la sphère, le problème que je viens d'étudier sur le cylindre.

Déformation d'une sphère pesante comprimée entre deux plans horizontaux.

Les molécules n'ayant aucune tendance à sortir du méridien où elles se trouvent, le déplacement de chacune d'elles suivant la normale à ce plan, $w = 0$.

A cause de la symétrie des forces autour du diamètre vertical, les déplacements u et v suivant le rayon et suivant la tangente au méridien, ainsi que la dilatation cubique θ, sont indépendants de la longitude ψ.

Enfin les composantes du poids suivant le rayon et suivant la tangente au méridien sont

$$R_0 = -gs, \quad \Phi_0 = -gc,$$

s étant le sinus et c le cosinus de la latitude φ. Alors les quantités

$$(1) \qquad \begin{cases} \theta = \frac{1}{r^2}\frac{dr^2u}{dr} + \frac{1}{rc}\frac{dcv}{d\varphi}, \\ \zeta = \frac{du}{d\varphi} - \frac{drv}{dr} \end{cases}$$

doivent satisfaire aux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) r^2 \frac{d\theta}{dr} + \frac{\mu}{c}\frac{dc\zeta}{d\varphi} = \varpi r^2 s, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{d\varphi} - \frac{\mu}{c}\frac{dc\zeta}{dr} = \varpi r c, \end{cases}$$

en posant

$$\rho g = \varpi;$$

et les composantes des forces élastiques exercées sur les éléments tangents aux trois surfaces orthogonales qui se croisent en chaque point sont (*Voir* LAMÉ, *Élasticité*, 15e leçon)

$$R_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dr}, \qquad \Phi_3 = \Psi_2 = 0,$$

$$\Phi_2 = \lambda\theta + 2\mu\left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi}\right), \qquad \Psi_1 = R_3 = 0,$$

$$\Psi_3 = \lambda\theta + 2\mu\left(\frac{u}{r} - \frac{s}{c}\frac{v}{r}\right), \qquad R_2 = \Phi_1 = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi} + r\frac{d\frac{v}{r}}{dr}\right).$$

Ainsi il ne peut y avoir de composantes tangentielles que sur l'élément tangent au cône de latitude, suivant le rayon, et sur l'élément tangent à la sphère, suivant la tangente au méridien.

Intégrales particulières propres à faire disparaître les seconds membres. — Pour intégrer les équations (2) et (1), nous chercherons d'abord à faire disparaître les seconds membres, dont la forme conduit à poser

$$\theta = A\varpi rs, \quad \zeta = B\varpi r^2 c.$$

On a, pour déterminer les constantes A et B, deux équations identiques à

$$A(\lambda + 2\mu) - 2B\mu = 1.$$

Pour plus de simplicité, supposons-les égales, nous aurons

$$A = B = \frac{1}{\lambda},$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{\varpi}{\lambda} rs, \quad \zeta = \frac{\varpi}{\lambda} r^2 c. \tag{3}$$

Les valeurs de u et v, propres à faire disparaître les termes correspon-

dants des équations (1), c'est-à-dire les seconds membres des suivantes :

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2u}{dr} + \frac{1}{rc}\frac{dcv}{d\varphi} = \frac{\varpi}{\lambda} rs,$$
$$\frac{du}{d\varphi} - \frac{drv}{dr} = \frac{\varpi}{\lambda} r^2 c,$$

s'obtiendront en posant

$$u = \frac{A\varpi}{\lambda} r^2 s, \quad v = \frac{B\varpi}{\lambda} r^2 c.$$

On trouve

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{10},$$

Par conséquent

$$(4) \qquad u = \frac{\varpi}{10\lambda} r^2 s, \quad v = -\frac{3\varpi}{10\lambda} r^2 c,$$

d'où l'on tire

$$R_1 = \left(1 + \frac{2\mu}{5\lambda}\right)\varpi rs,$$
$$\Phi_2 = \Psi_3 = \left(1 + \frac{4\mu}{5\lambda}\right)\varpi rs,$$
$$\Phi_4 = R_2 = -\frac{\mu\varpi}{5\lambda} rc.$$

Il reste à trouver les intégrales générales des équations sans second membre.

Calcul de θ et ζ. — Les équations (2) privées de leurs seconds membres peuvent être mises sous la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) cr^2 \dfrac{d\theta}{dr} + \mu \dfrac{dc\zeta}{d\varphi} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) c \dfrac{d\theta}{d\varphi} - \mu \dfrac{dc\zeta}{dr} = 0. \end{cases}$$

On voit que, si on les ajoute après avoir différentié la première par rapport à r et la seconde par rapport à φ, ζ disparaît, et on a, en divisant ensuite par c,

$$\frac{dr^2\dfrac{d\theta}{dr}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\dfrac{d\theta}{d\varphi}}{d\varphi} = 0,$$

ou en posant, pour abréger,

$$\vartheta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} F,$$

$$s = \sin\varphi = \alpha;$$

d'où

$$\frac{d.}{d\varphi} = c\frac{d.}{d\alpha}\frac{1}{c}, \quad \frac{dc\frac{d_1}{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{d(1-\alpha^2)\frac{d.}{d\alpha}}{d\alpha},$$

$$\frac{dr^2\frac{dF}{dr}}{dr} + \frac{d(1-\alpha^2)\frac{dF}{d\alpha}}{d\alpha} = 0. \tag{6}$$

La résolution de cette équation aux différentielles partielles se ramène à celle de deux équations différentielles ordinaires en faisant

$$F = RP,$$

où R ne contient que r et P que α. Car on peut alors l'écrire ainsi

$$\frac{1}{R}\frac{dr^2\frac{dR}{dr}}{dr} = -\frac{1}{P}\frac{d(1-\alpha^3)\frac{dP}{d\alpha}}{d\alpha} = \text{const},$$

puisque la valeur commune des deux membres ne dépend pas de α à cause du premier, ni de r à cause du second. Soit K cette constante; on a d'abord, pour déterminer R, l'équation

$$\frac{dr^2\frac{dR}{dr}}{dr} = kR. \tag{7}$$

Posant $R = r^n$ et supprimant r^n facteur commun, il vient

$$n(n+1) = k,$$

équation qui donne pour n deux valeurs. Gardons la lettre n pour désigner l'une d'elles, qui est arbitraire, l'autre sera $-(n+1)$, puisque leur somme doit être égale à -1. L'intégrale générale de l'équation (7) est donc

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}},$$

les coefficients A et B étant arbitraires. Remplaçant maintenant k par $n(n+1)$, il restera à résoudre l'équation

$$\frac{d(1-\alpha^2)\frac{dP}{d\alpha}}{da} + n(n+1)P = 0, \tag{8}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2P}{d\alpha^2} - 2\alpha\frac{dP}{d\alpha} + n(n+1)P = 0.$$

Posant $P = \alpha^h$, le premier membre deviendra

$$(n-h)(n+h+1)\alpha^h + h(h-1)\alpha^{h-2},$$

et le premier terme disparaîtra si l'on fait

$$h = n \quad \text{ou} \quad h = -(n+1).$$

Considérons la première hypothèse et posons

$$P = C\alpha^n + C_2\alpha^{n-2}.$$

Le premier terme disparaîtra toujours; le second aussi en prenant

$$C_2 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}C.$$

Mais on introduira ainsi un terme en α^{n-4}, qui disparaîtra de même si l'on ajoute à P un terme semblable ayant pour coefficient

$$C_4 = -\frac{(n-2)(n-3)}{h(2n-3)}C_2,$$

et ainsi de suite, le coefficient de chaque nouveau terme étant lié au précédent par la relation

$$C_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2n-2k+1)}C_{2k-2}.$$

Par conséquent, le coefficient du terme général, de celui qui en a k

avant lui, est

$$C_{2k} = (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k+1)}{2.4.6\dots 2k(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)} C.$$

Dans la question qui nous occupe, la constante arbitraire n est assujettie à être entière et positive pour que le développement ne devienne pas infini quand $\alpha = 0$. Alors la suite s'arrête d'elle-même à un terme dont l'exposant est 0 ou 1, suivant que n est pair ou impair.

La condition que le développement ne devienne pas infini pour $\alpha = 0$ nous force aussi à laisser de côté celui qu'on obtiendrait en prenant $h = -(n+1)$.

La valeur de P la plus générale qui puisse nous convenir est donc

$$(9) \qquad P_n = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \alpha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \alpha^{n-4} - \dots,$$

en supposant égale à l'unité la constante C, qui ferait double emploi avec celles déjà introduites par l'intégration de l'équation en r.

La valeur correspondante de F est

$$(10) \qquad F_n = \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n.$$

En donnant à n toutes les valeurs entières et positives, on aura des solutions de l'équation (6) ; changeant chaque fois les coefficients arbitraires A et B, et faisant la somme, on aura une expression qui satisfera toujours à cette équation linéaire, et ce sera la valeur la plus générale qu'on puisse prendre pour F dans la question qui nous occupe. Cette valeur est

$$F = \sum_0^\infty \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n.$$

Quand la sphère est plane, il faut supprimer tous les B, parce que les termes correspondants deviennent infinis pour $r = 0$.

Cherchons maintenant ζ. Au moyen de la valeur de F, les équations (5) donnent, à cause de

$$\frac{d.}{d\varphi} = c \frac{d.}{dz}$$

et de l'équation (8),

$$\frac{d.c\zeta}{dr} = \mathrm{S}\left(\mathrm{A}r^n + \frac{\mathrm{B}}{r^{n+1}}\right) c^2 \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha},$$

$$\frac{d.c\zeta}{d\alpha} = \mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{A}r^{n+1}}{n+1} - \frac{\mathrm{B}}{nr^n}\right) \frac{dc^2 \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}}{d\alpha};$$

par conséquent

$$c\zeta = \mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{A}r^{n+1}}{n+1} - \frac{\mathrm{B}}{nr^n}\right) c^2 \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + k.$$

La quantité k ne contient pas r à cause de la première des équations précédentes, ni α à cause de la seconde; c'est donc une constante.

Détermination de u et v. — Les équations (1) qui donnent u et v en θ et ζ peuvent s'écrire

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr^2 u}{dr} + \dfrac{1}{c}\dfrac{dcrv}{d\varphi} = \dfrac{\mu r^2}{\lambda + 2\mu}\mathrm{F}, \\ \dfrac{du}{d\varphi} - \dfrac{drv}{dr} = \zeta. \end{cases}$$

On pourra décomposer les valeurs de u et v de la manière suivante :

$$u = u_e + u_0, \quad v = v_e + v_0,$$

u_e, v_e étant des intégrales particulières propres à faire disparaître les seconds membres des équations précédentes; u_0, v_0 les intégrales générales des mêmes équations privées de leurs seconds membres.

La seconde équation (11) montre que u_0, rv_0 sont les dérivées par rapport à r et φ d'une même fonction F'. Posant dans la première

$$u_0 = \frac{d\mathrm{F}'}{dr}, \quad rv_0 = \frac{d\mathrm{F}'}{d\varphi},$$

il vient

$$\frac{dr^2 \dfrac{d\mathrm{F}'}{dr}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\dfrac{d\mathrm{F}'}{d\varphi}}{d\varphi} = 0,$$

la fonction F' satisfait donc à l'équation (6), et, par conséquent,

elle a pour expression

$$F' = S\left(A' r^n + \frac{B'}{r^{n+1}}\right) P,$$

ce qui donne

$$(12) \qquad \begin{cases} u_0 = S\left(n A' r^{n-1} - \frac{(n+1) B'}{r^{n+2}}\right) P, \\ v_0 = S\left(A' r^{n-1} + \frac{B'}{r^{n+2}}\right) c \frac{dP}{d\alpha}. \end{cases}$$

La forme des intégrales particulières u_e, v_e est indiquée par celles des seconds membres des équations auxquelles elles doivent satisfaire. En examinant les valeurs de F et de ζ, et se rappelant en outre que $\frac{dc^2 \frac{dP}{d\alpha}}{d\alpha}$ s'exprime en P au moyen de l'équation (8), on est naturellement conduit à poser

$$(13) \qquad \begin{cases} u_e = S\left(-\gamma A r^{n+1} - \gamma' \frac{B}{r^n}\right) P, \\ v_e = S\left(-\beta A r^{n+1} + \beta' \frac{B}{r^n}\right) c \frac{dP}{d\alpha} - \frac{k}{c}; \end{cases}$$

v devant rester fini pour $c = 0$, il faut que k soit nul. Et si l'on substitue les expressions précédentes, ainsi que les valeurs F et ζ dans les équations (11), on voit que

$$\beta = \frac{(n+1)e + 2a}{2a(n+1)(2n+3)}, \quad \gamma = \frac{(n+2)e - 2a}{2(2n+3)a},$$
$$\beta' = \frac{ne - 2a}{2n(2n-1)a}, \quad \gamma' = \frac{(n-1)e + 2a}{2(2n-1)a},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\lambda + 2\mu = a,$$
$$a - \mu = e \quad \text{ou} \quad e = \lambda + \mu.$$

Réunissant les valeurs (3), (4), (10), (12), (13), on a, pour les expres-

sions générales de θ, u et v,

$$(14)\quad \begin{cases} \theta = \frac{\varpi}{\lambda} rs + \mathrm{S}\left(\frac{\mu}{a} \mathrm{A} r^n + \frac{\mu}{a} \frac{\mathrm{B}}{r^{n+1}}\right) \mathrm{P}, \\ u = \frac{\varpi}{10\lambda} r^2 s + \mathrm{S}\left[n \mathrm{A}' r^{n-1} - \gamma \mathrm{A} r^{n+1} - \frac{(n+1)\mathrm{B}'}{r^{n+2}} - \frac{\gamma' \mathrm{B}}{r^n}\right] \mathrm{P}, \\ v = -\frac{3\varpi}{10\lambda} r^2 c + \mathrm{S}\left(\mathrm{A}' r^{n-1} - \beta \mathrm{A} r^{n+1} + \frac{\mathrm{B}'}{r^{n+2}} + \frac{\beta' \mathrm{B}}{r^n}\right) c \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer, au moyen des équations à la surface, les constantes introduites par l'intégration.

Équations à la surface. — Pour les obtenir, il faut substituer les valeurs de θ, u, v dans les équations obtenues en exprimant que les composantes de la force élastique sont égales aux pressions exercées sur les surfaces extérieure ou intérieure.

Quand la sphère est pleine, on a seulement les deux équations suivantes :

$$\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dr}\right)_1 = \mathfrak{N}_1,$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi} + r\frac{d\frac{v}{r}}{dr}\right)_1 = 0,$$

relatives à la surface extérieure. Mais si la sphère était creuse, il faudrait en écrire encore deux autres :

$$\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dr}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi} + r\frac{d\frac{v}{r}}{dr}\right)_0 = 0,$$

relatives à la surface intérieure.

Afin de séparer la partie de chaque coefficient due au poids de la sphère de celle qui lui est ajoutée par la compression, nous considérerons d'abord la sphère simplement pesante, puis la sphère simplement comprimée; on pourra ensuite réunir les résultats.

Détermination des coefficients relatifs à la sphère simplement pesante.

1° *Elle est pleine.* — Si l'on fait passer dans les seconds membres les parties des premiers relatives au poids de la sphère, et qu'on pose, pour abréger,

$$(15)\quad \begin{cases} 2n(n-1)\mu A' r^{n-2} - \dfrac{\mu}{a}\dfrac{n(n+1)e-b}{2n+3} A r^n \\ \quad + \dfrac{2(n+1)(n+2)}{r^{n+3}}\mu B' + \dfrac{\mu}{a}\dfrac{(n+1)(n+2)e-b}{(2n-1)r^{n+1}} B = K, \\ 2(n-1)\mu A' r^{n-2} - \dfrac{\mu}{a}\dfrac{(n+1)^2 e-a}{(n+1)(2n+3)} A r_n \\ \quad - \dfrac{2(n+2)\mu}{r^{2n-3}} B' - \dfrac{\mu}{a}\dfrac{n^2 e-a}{n(2n-1)r^{n+1}} B = L, \end{cases}$$

où l'on a fait

$$3\lambda + 2\mu = b \quad \text{d'où} \quad a+b = 4e,$$

les équations à la surface dans le cas de la sphère pleine sont

$$S K_1 P = -\left(1 + \frac{2\mu}{5\lambda}\right)\varpi r_1 s + \mathfrak{N}_1 = N_1,$$

$$S L_1 c \frac{dP}{d\alpha} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_1 c.$$

Pour isoler les coefficients de la première série, on se sert du théorème suivant, connu depuis longtemps :

$$\int_{-1}^{+1} P_n P_{n'} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \lesssim n'. \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 d\alpha & \text{si} \quad n = n'. \end{cases}$$

D'après cela, pour avoir $K_1^{(n)}$, on multiplie les deux membres de l'équation par $P_n \partial\alpha$, et on intègre entre les limites extrêmes de α, -1 et $+1$; les termes correspondant aux autres valeurs de n dispa-

raissent, et il vient

$$K_1^{(n)} = \frac{\int_{-1}^{+1} P_n N \, d\alpha}{\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 \, d\alpha}.$$

Si nous cherchons d'abord la partie de $K_1^{(n)}$ qui répond au premier terme de N, elle est égale à

$$\frac{-\left(1 + \frac{2\mu}{s\lambda}\right) \varpi r_1 \int_{-1}^{+1} P_n \alpha \, d\alpha}{\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 \, d\alpha}.$$

$\int_{-1}^{+1} P_n \alpha \, d\alpha = \int_{-1}^{+1} P_n P_1 \, d\alpha$ est nulle pour toute valeur de n différente de 1; donc $K_1^{(n)}$ est nul pour toute autre valeur (*), et comme

$$P_1 = \alpha_1 \int P_1 \alpha \, d\alpha = \int (P_1)^2 \, d\alpha,$$

$$K_1^{(0)} = 0, \quad K_1^{(1)} = -\left(1 + \frac{2\mu}{s\lambda}\right) \varpi r_1, \quad K_1^{(2)} = K_1^{(3)} \ldots = 0.$$

L'autre partie est

$$\frac{\int_{-1}^{+1} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha}{\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 \, d\alpha}.$$

Comme $\mathfrak{N}_1$ est nul, excepté dans un très-petit intervalle voisin de $-\frac{\pi}{2}$, où P_n ne varie pas sensiblement,

$$\int_{-1}^{+1} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = P_n(-1) \int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha.$$

(*) M. Resal a démontré (*Thèse de Mécanique*, p. 33; — *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, p. 431) une formule de réduction d'où il résulte plus généralement que $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha^p \, d\alpha$ est nulle, excepté pour les valeurs de n qui, sans dépasser p, sont de même parité que lui.

Le degré en α de tous les termes de P_n étant de même parité que n,

$$P_n(-1) = \pm P_n(1),$$

suivant que n est pair ou impair. $P_n(1)$ a une expression connue qu'on obtient en faisant $\alpha = 1$ dans le second membre de l'équation (9). C'est une somme qu'on peut transformer en produit de la manière suivante. La formule (*)

$$(2n-1)P_n = n\alpha P_{n-1} - (1-\alpha^2)\frac{dP_{n-1}}{d\alpha}$$

donne pour $\alpha = 1$

$$P_n(1) = \frac{n}{2n-1} P_{n-1}(1),$$

et comme

$$P_0(1) = 1,$$

$$P_n(1) = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \prod_1^n \frac{i}{2i-1}.$$

Pour évaluer le facteur $\int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 d\alpha$, on remarquera que le poids de la sphère est égal à la somme des pressions exercées par les différents points de contact sur le plan où elle repose. Tout étant symétrique autour du point de contact géométrique, pour la zone infiniment petite de hauteur $r_1 d\alpha$ la pression est égale à $2\pi r_1 . r_1 d\alpha . \mathfrak{N}_1$. Donc

$$-2\pi r_1^2 \int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 d\alpha = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \varpi,$$

d'où l'on tire

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 d\alpha = -\frac{2\varpi r_1}{3}.$$

Nous avons encore besoin de connaître $\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 d\alpha$. La relation (**)

$$P_{n+1} = \alpha P_n - \frac{n^2}{4n^2-1} P_{n-1}$$

(*) Lamé, *Fonctions curvilignes*, p. 242.

(**) *Ibid.*

donne, en multipliant par $P_{n+1}\,d\alpha$ et intégrant,

$$\int_{-1}^{+1}(P_{n+1})^2\,d\alpha=\int_{-1}^{+1}\alpha P_n P_{n+1}\,d\alpha;$$

d'où, en changeant n en $n-1$,

$$\int_{-1}^{+1}(P_n)^2\,d\alpha=\int_{-1}^{+1}\alpha P_{n-1} P_n\,d\alpha.$$

On trouve de la même manière

$$0=\int_{-1}^{+1}\alpha P_{n-1} P_n\,d\alpha-\frac{n^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1}(P_{n-1})^2\,d\alpha.$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1}(P_n)^2\,d\alpha=\frac{n^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1}(P_{n-1})^2\,d\alpha,$$

et comme

$$\int_{-1}^{+1}(P_0)^2\,d\alpha=1,$$

$$\int_{-1}^{+1}(P_n)^2\,d\alpha=2\,\frac{(1.2.3\ldots n)^2}{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)^2(2n+1)}=2\prod_{1}^{n}\frac{i^2}{4i^2-1}.$$

On a donc la seconde partie de

$$K_1^{(n)}=-(-1)^n\frac{1}{3}\varpi r_1\,\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots n}=-(-1)^n\frac{1}{3}\varpi r_1\prod_{1}^{n}\frac{2i+1}{i}.$$

Pour $n=0$, cette expression prend une forme illusoire. En remontant à la formule primitive, on trouve

$$K_1^{(0)}=-\frac{1}{3}\varpi r,$$

qui se déduit de l'équation précédente en supposant $1.2.3\ldots n$ égal à l'unité quand n est nul, conformément à la règle ordinaire.

La même équation donne la valeur complète de $K_1^{(n)}$, si pour $n=1$ on a soin d'augmenter le second membre de $-\left(1+\frac{2\mu}{5\lambda}\right)\varpi r_1$.

On isole les coefficients de la seconde série au moyen du théorème suivant dû à M. Lamé (*) :

$$\int_{-1}^{+1} c\frac{dP_n}{d\alpha}\, c\frac{dP_{n'}}{d\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \lesssim n', \\ n(n+1)\int_{-1}^{+1} (P_n)^2\, d\alpha & \text{si} \quad n = n'. \end{cases}$$

Pour obtenir $L_1^{(n)}$, on multiplie les deux membres de l'équation par $c\frac{dP_n}{d\alpha}\, d\alpha$ et l'on intègre entre les limites -1 et $+1$ de α. Les termes correspondant aux autres valeurs de n disparaissent, et on a

$$n(n+1)L_1^{(n)}\int_{-1}^{+1}(P_n)^2\, d\alpha = \frac{\mu\varpi}{5\lambda}\, r_1 \int_{-1}^{+1} c^2\frac{dP_n}{d\alpha}\, d\alpha.$$

L'intégration par parties donne

$$\int (1-\alpha^2)\frac{dP}{d\alpha}\, d\alpha = (1-\alpha^2)P + 2\int P\alpha\, d\alpha,$$

$$\int_{-1}^{+1} c^2\frac{dP}{d\alpha}\, d\alpha = 2\int_{-1}^{+1} P\alpha\, d\alpha;$$

car le terme hors du signe $\int$ est nul aux limites. Or nous avons vu plus haut que le second membre est nul, excepté pour $n=1$. On a donc, ce cas excepté,

$$n(n+1)L_1^{(n)} = 0.$$

Donc tous les L_1 sont nuls, sauf $L_1^{(0)}$, qui paraît arbitraire, et $L_1^{(1)}$, que nous allons déterminer.

$$P_1 = \alpha\int (P_1)^2\, d\alpha = \int \alpha^2\, d\alpha = \frac{\alpha^3}{3},$$

$$\int_{-1}^{+1}(P_1)^2\, d\alpha = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^{+1} c^2\frac{dP_1}{d\alpha}\, d\alpha = 2\int_{-1}^{+1} P_1\alpha\, d\alpha = \frac{4}{3}.$$

Donc

$$L_1^{(1)} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda}\, r_1.$$

(*) Mémoire cité, équation (51), *Coordonnées curvilignes*, p. 329.

$L_2^{(0)}$ est-il réellement indéterminé? L'équation

$$S\, L_1 c \frac{dP}{d\alpha} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_1 c$$

se réduit maintenant à

$$L_1^{(0)} c \frac{dP_0}{d\alpha} + L_1^{(1)} c \frac{dP_1}{d\alpha} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_1 c,$$

et, à cause de la valeur de $L_1^{(1)}$, à

$$L_1^{(0)} c \frac{dP_0}{d\alpha} = 0.$$

Or

$$P_0 = 1, \quad \frac{dP_0}{d\alpha} = 0.$$

Donc $L_1^{(0)}$ reste arbitraire. Ainsi on a en résumé

$$L_1^{(0)} = \frac{0}{0}, \quad L_1^{(1)} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_1, \quad L_1^{(2)} = L_1^{(3)} \ldots = 0.$$

Connaissant les K, L, les A, B, A′, B′ s'en déduisent par des équations (15) du premier degré. Ici, où la sphère est pleine, les B, B′ sont nuls, et l'on a, pour déterminer les A, A′, les équations suivantes :

$$2n(n-1)\mu A' r^{n-2} - \frac{\mu}{a} \frac{n(n-1)e - b}{2n+3} A r^n = K,$$

$$2(n-1)\mu A' r^{n-2} - \frac{\mu}{a} \frac{(n+1)^2 e - a}{(n+1)(2n+3)} A r^n = L.$$

Pour $n = 0$, elles se réduisent à

$$\frac{\mu b}{3a} A = K,$$

$$-\frac{2\mu}{r^2} A' + \frac{\mu^2}{3a} A = L.$$

On a donc

$$A_1^{(0)} = \frac{3a}{\mu b} K_1^{(0)} = \frac{-a}{\mu b} \varpi r_1,$$

et, comme $L_1^{(0)}$ est indéterminé, $A_1'^{(0)}$ reste arbitraire.

Quand $n = 1$, elles deviennent

$$\frac{\mu b}{5a} A r_1 = K,$$

$$-\frac{\mu b}{10 a} A r_1 = L,$$

et s'accordent pour donner

$$A_1^{(1)} = -\frac{2a}{\lambda b}\varpi;$$

mais elles laissent $A_1^{\prime(1)}$ indéterminé.

Il est facile de se rendre compte de l'indétermination de $A_1^{\prime(0)}$ et $A_1^{\prime(1)}$; car, en remontant aux expressions générales de u et v (14), on voit que $A_1^{\prime(0)}$ disparaît de u à cause du facteur n, qui est nul, et de v à cause du facteur $\frac{dP_0}{d\alpha}$, qui est nul également. Quant à $A_1^{\prime(1)}$, il répond, dans u, au terme $A_1^{\prime(1)}\alpha$, et dans v au terme $A_1^{\prime(1)}c$. Par conséquent cette constante représente une translation de la sphère suivant une verticale. Or il est clair qu'un pareil mouvement ne peut faire naître aucune force intérieure, ni troubler l'équilibre d'élasticité. Telle est la cause de l'indétermination de cette constante tant qu'on n'introduit pas d'autres conditions que les équations à la surface. On la fera disparaître en assujettissant un point à rester fixe. Si c'est le centre, on aura $A_1^{\prime(1)} = 0$.

Pour les valeurs de n supérieures à l'unité, on a, en remarquant que L est nul,

$$A = \frac{Kn}{\mu r_1^n}\frac{(n+1)(2n+3)}{2n(n-1)e+(2n+1)b},$$

$$A' = \frac{K}{2\mu(n-1)r_1^{n-2}}\frac{(n+1)^2 e - u}{2n(n-1)e+(2n+1)b},$$

formules qui ne présentent aucune impossibilité. On en tire, eu égard à la valeur de K,

$$u_n = -(-1)^n\frac{\varpi r_1^2}{6\mu}\frac{n[(n+1)^2e-a]-(n^2-1)[(n+2)e-2a]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{(n-1)[2n(n-1)e+(2n+1)b[}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n-1}\Pi_n P_n,$$

$$v_n = -(-1)^n\frac{\varpi r_1^2}{6\mu}\frac{(n+1)^2e-a-(n-1)[(n+1)e+2a]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{(n-1)[2n(n-1)e+(2n+1)b}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n-1}\Pi_n c\frac{dP_n}{d\alpha},$$

où l'on a fait, pour simplifier l'écriture,

$$\prod_{1}^{n} \frac{2i+1}{i} = \Pi_n.$$

Pour avoir les valeurs complètes de u et v, il faut joindre aux sommes précédentes, prises à partir de $n = 2$,

$$u_0 = -\frac{\varpi r_1^2}{3b}\left(\frac{r}{r_1}\right), \qquad v_0 = 0,$$

$$u_1 = \frac{(\lambda-\mu)\varpi r_1^2}{5\lambda b}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \alpha, \quad v_1 = \frac{(e+a)\varpi r_1^2}{5\lambda b}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 c,$$

et, en outre, les termes hors des signes S,

$$u = \frac{\varpi}{10\lambda} r^2 \alpha, \quad v = -\frac{3\varpi}{10\lambda} r^2 c.$$

On a ainsi

$$u = -\frac{\varpi r_1^2}{6\lambda}\left[\frac{2\mu}{b}\left(\frac{r}{r_1}\right) - \frac{3\mu}{b}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \alpha\right] + \sum_{2}^{\infty} u_n,$$

$$v = -\frac{\varpi r_1^2}{6\mu}\frac{3\mu}{b}\left(\frac{r}{r_1}\right) c + \sum_{2}^{\infty} v_n.$$

2° *La sphère est creuse.* — Si nous considérons d'abord les équations relatives à la surface extérieure, les parties des coefficients qui proviennent du poids sont toujours les mêmes, mais il y a une différence pour la partie de $\mathrm{K}_1^{(n)}$ qui répond à la pression exercée par le plan d'appui; r_1 devra être multiplié dans la formule correspondante par $1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}$, rapport des volumes de la sphère creuse et de la sphère pleine.

Les nouvelles équations de condition relatives à la surface intérieure sont

$$\mathrm{S}\,\mathrm{K}_0\mathrm{P} = -\left(1 + \frac{2\mu}{5\lambda}\right)\varpi r_0 s,$$

$$\mathrm{S}\,\mathrm{L}_0 c \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_0 c.$$

On verra, comme précédemment, que K_0 est nul pour toutes les valeurs

de n différentes de 1, et que

$$K_0^{(1)} = -\left(1 + \frac{2\mu}{5\lambda}\right)\varpi r_0;$$

de même, on trouvera que tous les L_0 sont nuls, excepté $L_0^{(0)}$, qui reste arbitraire, et

$$L_0^{(1)} = \frac{\mu\varpi}{5\lambda} r_0.$$

On calculera les coefficients A, A′, B, B′ au moyen des équations (15), qu'il faut écrire deux fois, en affectant r, K, L d'abord de l'indice 1, puis de l'indice 0.

Pour $n = 0$, elles se réduisent à

$$\frac{\mu b}{3a} A + \frac{4\mu}{r_1^3} B' = K_1,$$
$$\frac{\mu b}{3a} A + \frac{4\mu}{r_0^3} B' = 0,$$
$$B = 0;$$

par conséquent, elles laissent A′ arbitraire. Comme il n'entre ni dans u ni dans v, on peut le supposer nul. Les valeurs des autres inconnues sont

$$A = -\frac{\varpi a r_1}{\mu b}, \quad B' = \frac{\varpi r_0^3 r_1}{12\mu}.$$

Pour $n = 1$, on a les équations

$$\frac{\mu b}{5a} A r_1 + \frac{12\mu}{r_1^4} B' + \frac{\mu(6e - b)}{a r_1^2} B = K_1,$$
$$-\frac{\mu b}{10a} A r_1 - \frac{6\mu}{r_1^4} B' - \frac{\mu(e - a)}{a r_1^2} B = L_1,$$
$$\frac{\mu b}{5a} A r_0 + \frac{12\mu}{r_0^4} B' + \frac{\mu(6e - b)}{a r_0^2} B = K_0,$$
$$-\frac{\mu b}{10a} A r_0 - \frac{6\mu}{r_0^4} B' - \frac{\mu(e - a}{a r_0^2} B = L_0.$$

$A_0^{\prime(1)}$, qui a disparu, reste indéterminé; il est nul, comme on l'a déjà vu, quand on fixe le centre. Il reste à voir que ces quatre équations s'ac-

cordent pour donner aux trois inconnues les mêmes valeurs; en d'autres termes, qu'elles sont compatibles. Or elles donnent, par l'élimination des inconnues,

$$r_1^2(K_1 + 2L_1) = r_0^2(K_0 + 2L_0),$$

relation facile à vérifier au moyen des valeurs des quantités qui y entrent. M. Lamé a prouvé, en général, qu'elle résulte nécessairement de ce que les forces données doivent se faire équilibre sur l'enveloppe sphérique, considérée comme un système invariable.

Je ne développerai pas davantage les calculs relatifs à ce cas.

Détermination des coefficients dans le cas de la sphère simplement comprimée.

1° *Elle est pleine.* — On a toujours, les notations restant les mêmes,

$$K_1^{(n)} = \frac{\int_{-1}^{+1} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha}{\int_{-1}^{+1} (P_n)^2 \, d\alpha}.$$

$\mathfrak{N}_1$ est nul tant que α n'est pas très-voisin de l'une ou l'autre de ses deux limites. Dans chacun des intervalles où il n'est pas nul, P_n ne varie pas sensiblement, de sorte qu'on peut poser

$$\int_{-1}^{0} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = P_n(-1) \int_{-1}^{0} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha,$$

$$\int_{0}^{1} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = P_n(1) \int_{0}^{1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha.$$

Comme $\mathfrak{N}_1$ reste le même quand α change de signe,

$$\int_{-1}^{0} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = \int_{0}^{1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\int_{-1}^{+1} P_n \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = [P_n(-1) + P_n(+1)] \int_0^1 \mathfrak{N}_1 \, d\alpha.$$

Mais les exposants de α dans P_n sont tous de même parité que n; donc

$$P_{2n+1}(\alpha) = -P_{2n+1}(-\alpha),$$
$$P_{2n}(\alpha) = P_{2n}(-\alpha),$$

et, par suite,

$$\int_{-1}^{+1} P_{3n+1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = 0,$$
$$\int_{-1}^{+1} P_{2n} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = 2 P_{2n}(1) \int_0^1 \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = P_{2n}(1) \int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha.$$

Quant à l'intégrale $\int_0^1 \mathfrak{N}_1 \, d\alpha$, si Q est la valeur absolue de la pression exercée sur la sphère par le plan, on trouve, de la même manière que dans le cas précédent,

$$\int_0^1 \mathfrak{N}_1 \, d\alpha = \frac{-Q}{2\pi r_1^2};$$

donc

$$K_1^{(2n+1)} = 0,$$
$$K_1^{(2n)} = \frac{-Q}{2\pi r_1^2} \frac{3.5.7 \ldots (4n+1)}{1.2.3 \ldots 2n} = \frac{-Q}{2\pi r_1^2} \prod_{2n},$$

formule qui s'applique même au cas où $n = 0$, si l'on convient de regarder alors $\prod_{2n}$ comme égal à 1.

Tous les L sont encore nuls, excepté $L_1^{(0)}$, qui reste arbitraire.

Les équations qui donnent A et A′ en fonction de K et L sont toujours les mêmes. On en conclut que

$$A_1^{(0)} = -\frac{3a}{\mu b} \frac{Q}{2\pi r_1^2}.$$

$A_1'^{(0)}$, qui reste indéterminé, peut être supposé nul; $A_1^{(1)}$ est nul; $A_1'^{(1)}$

qui est indéterminé, doit être pris égal à zéro, comme on l'a déjà vu, quand on fixe le centre.

Et les valeurs de K montrent qu'en général A et A′ sont nuls pour toutes les valeurs impaires de n.

On a donc

$$u = \frac{-Q}{2\mu\pi r_1}\left[\frac{\mu}{b}\left(\frac{r}{r_1}\right) + \sum_1^\infty \frac{n[(2n+1)^2 e - a] - (4n^2-1)[(n+1)e-a]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{(2n-1)[4n(2n-1)e+(4n+1)b]}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2n-1}\Pi_{2n}\,P_{2n}\right],$$

$$v = \frac{-Q}{4\mu\pi r_1}\sum_1^\infty \frac{(2n+1)^2 e - a - (2n-1)[(2n+1)e+2a]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{(2n-1)[4n(2n-1)e+(4n+1)b]}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2n-1}\Pi_{2n}\,c\,\frac{dP_{2n}}{d\alpha}.$$

2° *Cas de la sphère creuse.* — Les deux premières équations à la surface restent les mêmes, ainsi que les conséquences qu'on en tire.

Les K_0 sont nuls sans exception.

Les L_0 aussi, excepté $L_0^{(0)}$, qui reste arbitraire.

Le reste comme ci-dessus.

Lois générales de la déformation et de l'équilibre élastique.

On voit, par les formules précédentes, que, pour la sphère simplement comprimée, v est nul à l'équateur à cause du facteur $\frac{dP_{2n}}{d\alpha}$, et aux pôles à cause du facteur c, ce qui devait être.

Les déplacements u, v, la dilatation cubique θ, et, par suite, les composantes des forces élastiques sont proportionnels à la compression Q, pour la sphère simplement comprimée, et, pour la sphère simplement pesante, à son poids spécifique ϖ.

Si l'on compare deux sphères de rayon différent, u et v sont, pour une même valeur du rapport $\frac{r}{r_1}$, proportionnels au carré du rayon si la sphère est simplement pesante, et en raison inverse de la première puissance du rayon si la sphère est simplement comprimée.

La dilatation cubique et les forces élastiques sont, dans le premier cas, proportionnelles à la première puissance du rayon, et dans le second en raison inverse de son carré.

Si r', φ' sont les nouvelles coordonnées du point (r, φ), on a, aux quan-

tités près du second ordre par rapport aux déplacements,

$$r' = r + u,$$
$$\varphi' = \varphi + \frac{v}{r'}.$$

En accentuant φ dans u, la première équation sera, au même degré d'approximation, celle de la sphère de rayon r déformée.

De même si l'on accentue r dans v, la seconde représentera ce que devient après la déformation le cône de latitude φ.

Le volume de la sphère de rayon r déformée peut s'exprimer en termes finis. En effet, le secteur sphérique élémentaire

$$\frac{2}{3}\pi r'^3\, d\alpha = \frac{2}{3}\pi(r^3 + 3r^2 u)\, d\alpha,$$

aux quantités près du second ordre en u. Donc le volume total

$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3 + 2\pi r^2 \int_{-1}^{+1} u\, d\alpha.$$

Or chaque terme de u ne dépend de α que par le facteur P_n, et

$$\int_{-1}^{+1} P_n P_0\, d\alpha = \int_{-1}^{+1} P_n\, d\alpha = 0$$

pour toute valeur de n autre que zéro. Donc....

Il est facile de trouver l'expression du volume. Car on a

$$u_0 = -\varepsilon r,$$

ε désignant une quantité qui est égale à $\frac{\varpi r_1}{3b}$ dans le cas de la sphère simplement pesante, et à $\frac{Q}{2b\varpi r_1^2}$ dans celui de la sphère simplement comprimée. Donc

$$\int_{-1}^{+1} u_0\, d\alpha = -\varepsilon r \int_{-1}^{+1} d\alpha = -2\varepsilon r,$$
$$2\pi r^2 \int_{-1}^{+1} u_0\, d\alpha = -4\pi r^3 \varepsilon = -\frac{4}{3}\pi r^3 . 3\varepsilon,$$
$$V' = V(1 - 3\varepsilon).$$

De la comparaison des valeurs de ε relatives aux deux cas que nous considérons, il résulte que la diminution de volume de la sphère sous l'action de son poids est égale à celle que produirait une compression moitié moindre sur une sphère égale non pesante.

J'ai conservé jusqu'ici aux constantes λ et μ leur indépendance ; mais dans les calculs numériques qui vont suivre, j'ai dû faire une hypothèse sur leur rapport : j'ai supposé $\lambda = \mu$, comme dans l'ancienne théorie battue en brèche par les expériences de Wertheim, dernièrement contredites par celles de M. Cornu (*). Alors

$$a = 3\mu, \quad b = 5\mu, \quad e = 2\mu,$$

et le coefficient d'élasticité (j'entends par là l'allongement de l'unité de longueur pour une traction égale à l'unité de poids exercée sur l'unité de surface)

$$E = \frac{2}{5\mu}.$$

Forme et état élastique des couches sphériques très-voisines du centre.

1° *Sphère simplement comprimée.* — L'hypothèse que nous venons de faire réduit les expressions des déplacements à

$$(16)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{5QE}{4\pi r_1}\left\{\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right) + \sum_1^\infty \left[\dfrac{n}{2n-1}\,\dfrac{2(2n+1)^2-3}{4n(4n+3)+5} - \dfrac{4n^2-1}{4n(4n+3)+5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2\right]\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{2n-1} \Pi_{2n}\, P_{2n}\right\}, \\ v = -\dfrac{5QE}{8\pi r_1}\sum_1^\infty \left[\dfrac{1}{2n-1}\,\dfrac{2n(2n+1)^2-3}{4n(4n+3)+5} - \dfrac{4(n+2)}{4n(4n+3)+5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2\right]\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{2n-1} \Pi_{2n}\, c\,\dfrac{dP_{2n}}{dx}. \end{cases}$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ;* 1869, 2e semestre, p. 336.

Si l'on suppose r assez petit pour qu'on puisse négliger le cube du rapport $\frac{r}{r_1}$,

$$u = \frac{5QE}{8\pi r_1^2}\left(\frac{103}{55} - \frac{75}{11}\sin^2\varphi\right) r.$$

On a donc, pour l'équation de la sphère de rayon r après la déformation,

$$r' = r\left[1 + \frac{5QE}{8\pi r_1^2}\left(\frac{103}{75} - \frac{75}{11}\sin^2\varphi'\right)\right].$$

Or il est facile de voir que l'équation d'une ellipse dont le demi-grand axe est a et l'aplatissement $\frac{a-b}{a} = \varepsilon$ est, en plaçant le pôle au centre et négligeant le carré de l'aplatissement,

$$\rho = a(1 - \varepsilon\sin^2\omega).$$

L'équation ci-dessus est donc celle d'une ellipse dont le demi-grand axe

$$a = r\left(1 + \frac{103}{55}\frac{5QE}{8\pi r_1^2}\right),$$

et l'aplatissement

$$\varepsilon = \frac{75}{11}\frac{5QE}{8\pi r_1^2}.$$

Le rapport du raccourcissement du rayon polaire à l'allongement du rayon équatorial est

$$\frac{272}{103} = 2{,}64 \text{ environ.}$$

Les points qui restent à la même distance du centre sont situés sur le cône de latitude défini par l'équation

$$\sin^2\varphi' = \frac{103}{375}, \quad \text{d'où} \quad \varphi' = 31^\circ 36' \text{ environ.}$$

On a, au même degré d'approximation,

$$v = -\frac{5QF}{8\pi r_1^2}\frac{75}{22} r \sin 2\varphi,$$

quantité négative, proportionnelle au rayon et au sinus du double de la latitude. Nulle à l'équateur et tout le long du rayon polaire, elle atteint son maximum pour la latitude de 45 degrés.

Comme elle est proportionnelle à r, on voit que les rayons restent sensiblement droits, ce qui résulte aussi de l'équation du rayon déformé

$$\varphi' = \varphi - \frac{5QE}{8\pi r_1^2}\,\frac{75}{22}\sin 2\varphi,$$

où r n'entre pas.

La dilatation cubique

$$\theta = -\frac{5QE}{8\pi r_1^2}\cdot 6:$$

elle est négative, constante, et suit du reste les lois générales énoncées plus haut.

Les forces élastiques sont, suivant le rayon sur l'élément tangent à la sphère

$$R_1 = \frac{Q}{22\pi r_1^2}(14 - 75\sin^2\varphi),$$

indépendantes du rayon. C'est une traction à l'équateur, une pression au pôle; le changement de signe a lieu sur le parallèle dont la latitude est donnée par l'équation

$$\sin^2\varphi = \frac{14}{75}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = 25°36'.$$

Le rapport de la pression au pôle à la traction sur l'équateur est

$$\frac{61}{14} = 4,36.$$

La force qui agit suivant la tangente au méridien sur l'élément tangent au cône de latitude

$$\Phi_2 = \frac{Q}{22\pi r_1^2}(14 - 75\cos^2\varphi).$$

C'est une pression à l'équateur et une traction au pôle; le changement de sens a lieu sur le parallèle dont la latitude est complémentaire de la précédente, c'est-à-dire à 64°24'.

Sur l'élément situé dans le plan du méridien, s'exerce, suivant la tangente au parallèle, la force

$$\Psi_3 = \frac{7Q}{11\pi r_1^2} :$$

traction, partout la même.

Enfin, suivant la tangente au méridien sur l'élément tangent à la sphère, et, suivant le rayon, sur l'élément tangent au cône de latitude, agit la force élastique

$$\Phi_1 = R_2 = -\frac{75Q}{44\pi r_1^2}\sin 2\varphi :$$

pression, nulle sur l'équateur et au pôle, maxima pour $\varphi = 45°$.

2° *Sphère simplement pesante.* — Les expressions des déplacements deviennent, si l'on fait $\lambda = \mu$,

$$(17)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{5\varpi E r_1^2}{12}\left\{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right) - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2\alpha \right. \\ \qquad\qquad + \sum_2^\infty (-1)^n\left[\dfrac{n}{n-1}\,\dfrac{2(n+1)^2-3}{2n(2n+3)+5} - \dfrac{2(n^2-1)}{2n(2n+3)+5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2\right]\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{n-1}\Pi_n P_n\Big\}, \\ v = -\dfrac{5\varpi E r_1^2}{12}\left\{\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2 c \right. \\ \qquad\qquad + \sum_2^\infty (-1)^n\left[\dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{2(n+1)^2-3}{2n(2n+3)+5} - \dfrac{2(n+4)}{2n(2n+3)+5}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2\right]\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{n-1}\Pi_n c\,\dfrac{dP_n}{d\alpha}\Big\}. \end{cases}$$

En négligeant $\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2$, on a simplement

$$u = \frac{5\varpi E r_1}{12}\left(\frac{103}{75} - \frac{75}{11}\sin^2\varphi\right)r,$$

$$v = -\frac{5\varpi E r_1}{12}\,\frac{75}{22}\,r\sin 2\varphi,$$

qui ne diffèrent des résultats précédemment obtenus pour la sphère simplement comprimée que par un facteur constant. On pouvait le voir à l'inspection des formules générales.

Les conséquences que nous en avons déduites dans le premier cas subsistent donc encore. Et, comme nous l'avons déjà remarqué à pro-

pos de la variation du volume, les couches très-voisines du centre de la sphère simplement pesante sont absolument dans le même état que celles d'une sphère identique, non pesante, qui serait soumise à une compression égale à la moitié du poids de la première.

La seule différence est que les résultats précédents ne sont vrais, pour la sphère pesante, qu'en négligeant $\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$; tandis que, pour la sphère comprimée, ils subsistent tant qu'on peut négliger $\left(\frac{r}{r_1}\right)^3$.

Comment les lois précédentes se modifient quand on s'éloigne du centre.

1° *Sphère simplement pesante.* — Si l'on tient compte des termes en $\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$, le rayon vecteur de l'ellipse que nous avons trouvée pour la section méridienne de la sphère du rayon r déformée doit être augmenté de

$$-\frac{5\varpi E r_1^2}{12}\left(\frac{8427}{1180}-\frac{3045}{236}\alpha^2\right)\alpha\left(\frac{r}{r_1}\right)^2,$$

fonction impaire de la latitude, nulle à l'équateur, négative depuis $\alpha = 0$ jusqu'à

$$\alpha^2 = \frac{8427}{15225},$$

puis positive jusqu'au pôle.

Il en résulte qu'au lieu d'une ellipse, on a, pour la section méridienne, une courbe plus aplatie au-dessous de l'équateur, moins aplatie au-dessus, qui rencontre l'ellipse en six points, deux sur l'équateur, et les quatre autres sur le cône de latitude $\varphi = 47°51'$.

Le diamètre équatorial et le diamètre polaire ont la même longueur que dans l'ellipse; il en est de même, en général, de toute corde passant par le centre de la sphère.

La valeur de v doit être augmentée d'une quantité égale, à un facteur positif près, à

$$-(1251-7075\alpha^2)c\left(\frac{r}{r_1}\right)^2,$$

fonction paire de la latitude; ce qui montre que les rayons, toujours tangents à l'origine aux directions que nous avons déterminées dans la première approximation, se courbent vers le bas, entre les latitudes $\pm 24°54'$, et vers le haut, pour les latitudes supérieures en valeur absolue, jusqu'au pôle, où la courbure redevient nulle. Le maximum de la courbure vers le bas a lieu évidemment sur l'équateur même.

2° *Sphère simplement comprimée.* — Les valeurs de u et de v ne renferment pas de termes en $\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$. Le terme de u en $\left(\frac{r}{r_1}\right)^3$ a pour coefficient, à un facteur positif près,

$$\frac{15}{11}\left(\alpha^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1645}{62}\left(\alpha^4 - \frac{6}{7}\alpha^2 + \frac{3}{35}\right),$$

quantité négative pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Ainsi la section méridienne est intérieure à l'ellipse, à l'équateur et au pôle. Elle en sort au point dont la latitude est $7°2'$ environ, et y rentre au point qui a pour latitude $58°12'$.

Le coefficient de $\left(\frac{r}{r_1}\right)^3$ dans l'expression de v est égal, à un facteur constant et positif près, à

$$(14577 - 18095\alpha^2)\alpha c.$$

On voit que le rayon polaire et le rayon équatorial restent droits; il en est de même des rayons situés sur le cône dont la latitude est $63°51$; hors de ce cône, les rayons sont légèrement courbés vers le haut; en dedans, leur courbure est dirigée vers le bas.

Il serait facile d'étudier de la même manière les modifications produites par les termes qui contiennent les puissances plus élevées de $\frac{r}{r_1}$; mais je crois pouvoir m'arrêter ici.

Je donnerai seulement encore deux tableaux, qui font connaître : 1° pour la sphère simplement comprimée, l'allongement du rayon équatorial, le raccourcissement du rayon polaire et l'aplatissement; 2° pour la sphère simplement pesante, le raccourcissement des deux rayons polaires supérieur et inférieur, l'allongement et l'infléchissement du rayon équatorial, à toutes les distances du centre, de

dixième en dixième du rayon de la sphère, depuis le centre jusqu'à la surface.

Allongement du rayon équatorial, raccourcissement du rayon polaire et aplatissement, à diverses distances du centre, dans la sphère simplement comprimée.

Je désigne dans le tableau suivant, par u_0 et $-u_1$, l'allongement du rayon équatorial et le raccourcissement du rayon polaire; A est l'aplatissement; $\varepsilon = \frac{5QE}{8\pi r_1}$.

$\frac{r}{r_1}$	$\frac{u_0}{\varepsilon}$	$\frac{-u_1}{\varepsilon}$	$\frac{Ar_1}{\varepsilon}$
0,1	0,186	0,500	6,86
0,2	0,353	1,032	6,92
0,3	0,496	1,634	7,10
0,4	0,628	2,370	7,49
0,5	0,680	3,326	8,01
0,6	0,736	4,70	9,05
0,7	0,753	6,90	10,90
0,8	0,762	11,1	14,7
0,9	0,763	22	25
0,1	0,7		

u_1 a été calculé en faisant $\alpha = 1$ dans la première formule (16); ce qui donne, en remarquant que

$$\Pi_{2n} = \frac{3.5.7\ldots(4n+1)}{1.2.3\ldots 2n},$$

$$P_{2n}(1) = \frac{1.2.3\ldots 2n}{1.3.5\ldots(4n-1)},$$

$$\Pi_{2n} P_{2n}(1) = 4n+1.$$

On a ainsi une série à termes tous de même signe, qui est très-convergente quand $\frac{r}{r_1}$ est très-petit, mais qui le devient de moins en moins à mesure qu'on fait croître ce rapport. Pour $\frac{r}{r_1} = 0{,}9$, le dixième terme dépasse encore l'unité, le treizième est égal à 0,654; mais comme la somme des suivants est inférieure à 4 unités, j'ai pu avoir u_1 à cette distance du centre, à moins de 2 unités, sans prendre un plus grand nombre de termes, ce qui aurait rendu mes calculs beaucoup plus pénibles par des raisons qu'il serait trop long d'expliquer.

Pour $\frac{r}{r_1} = 1$, c'est-à-dire à la surface, la série est divergente.

La série qui donne u_0 s'obtient en faisant $\alpha = 0$ dans la première formule (16). Alors $P_{2n}(\alpha)$ se réduit à son dernier terme, de sorte qu'on a

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}.$$

Il en résulte que

$$\frac{P_{2n}(0)}{P_{2n}(1)} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.1.2.3\ldots n}.$$

On pourra donc déduire les termes de la nouvelle série de ceux de la précédente, en les multipliant par ce facteur.

Pour $\frac{r}{r_1} = 1$, c'est-à-dire à la surface, on a, en réduisant en un seul les deux termes entre parenthèses, et faisant entrer dans le numérateur de la fraction ainsi obtenue le facteur

$$\Pi_{2n} P_{2n}(1) = 4n + 1,$$

$$u_0 = -\frac{5QE}{8\pi r_1^2}\left\{\frac{2}{5} + 2\sum_1^\infty \left[(-1)^n \frac{48n^3 + 16n^2 - 3n - 1}{32n^3 + 8n^2 - 2n - 5} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.1.2.n}\right]\right\}.$$

Cette série à signes alternatifs est convergente, car le premier facteur de chaque terme est décroissant, le numérateur de sa dérivée

$$-(256n^4 + 632n^2 + 144n - 13)$$

étant négatif pour toutes les valeurs de n supérieures à l'unité. La limite de ce facteur pour n infini est $\frac{3}{2}$. Le second facteur va aussi en diminuant, car si n augmente d'une unité, il est multiplié par $\frac{2n+1}{2(n+1)}$ quantité < 1. De plus il a pour limite zéro, car, en l'écrivant ainsi

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

on voit que son logarithme népérien, qui est négatif, surpasse en valeur absolue le nombre

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

qui croît indéfiniment avec n.

Ainsi, la série est convergente, mais très-lentement, et les vingt-cinq termes que j'ai calculés ne donneraient pas la somme à 0,3 près, si je n'avais pas un moyen de l' obtenir plus rapidement que par le procédé ordinaire. Ce moyen est le suivant.

Soit une série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots,$$

dont les termes présentent des signes alternatifs, décroissent constamment en valeur abolue et tendent vers zéro, ainsi que la différence entre deux termes consécutifs; les deux moyennes

$$\frac{S_{2n}+S_{2n-1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{S_{2n}+S_{2n+1}}{2}$$

comprennent entre elles la somme de la série, qui ne diffère de chacune d'elles que d'une quantité moindre que leur différence

$$\frac{u_{2n}-u_{2n+1}}{2}.$$

On a une approximation deux fois plus grande en prenant la demi-somme des résultats. Dans le cas actuel, les vingt-cinq premiers termes suffisent pour donner la somme à moins de 0,002. En général, cette

méthode est surtout avantageuse quand les termes décroissent très-lentement.

La dernière colonne fait connaître la marche de l'aplatissement qui est, pour la couche située à la distance $\frac{nr_1}{10}$ du centre,

$$A = \frac{10(u_0 - u_1)}{nr_1}.$$

Tant que la section méridienne peut être considérée comme une ellipse, le volume de la sphère déformée est donné par l'expression

$$V' = \frac{4}{3}\pi r_0^2 r_1 = V\left(1 + \frac{2u_0 + u_1}{r}\right);$$

si on la rapproche de la formule générale donnée plus haut, qu'il faut maintenant écrire ainsi,

$$V' = V\left(1 - \frac{6\varepsilon}{5r_1}\right),$$

eu égard au changement de notation, on est conduit à la relation

$$\frac{2u_0 + u_1}{\varepsilon\frac{r}{r_1}} = -\frac{6}{5} = -1{,}2.$$

Or, pour $\frac{r}{r_1} = 0{,}1$, on trouve que le premier membre est égal à $-1{,}28$; donc, à une distance du centre égale à la dixième partie du rayon, les couches sphériques s'écartent déjà sensiblement de la forme sphérique.

Raccourcissement des rayons polaires, allongement et infléchissement du rayon équatorial à diverses distances du centre dans la sphère simplement pesante.

Dans le tableau suivant,

$$\varepsilon = \frac{5\varpi E r_1^2}{12},$$

$\frac{r_1}{r}$	$\frac{-u_{-1}}{\varepsilon}$	$\frac{-u_1}{\varepsilon}$	$\frac{u_0}{\varepsilon}$	$\frac{-v_0}{\varepsilon}$
0,1	0,559	0,441	0,186	0,031
0,2	1,276	0,788	0,353	0,120
0,3	2,204	1,064	0,496	0,249
0,4	3,446	1,294	0,628	0,400
0,5	5,189	1,463	0,680	2,551
0,6	7,785	1,615	0,736	0,645
0,7	12,106	1,686	0,753	0,707
0,8	20,359	1,775	0,762	0,735
0,9	42,755	1,777	0,763	0,770
1,0	»	1,778	0,763	0,780

Comme $P_{2n+1}(0)$ est nul, la valeur de $\frac{u}{\varepsilon}$ à l'équateur est la même que précédemment. Aux pôles les termes de degré pair en n sont aussi les mêmes; la différence ne provient que des termes de degré impair dont la somme, prise positivement, doit être ajoutée au raccourcissement du rayon inférieur et retranchée de celui du rayon supérieur, de sorte que la différence entre les raccourcissements des deux rayons polaires est égale à deux fois la somme des termes d'indice impair.

Dans le calcul de ces termes on fera

$$\Pi_{2n+1} P_{2n+1}(\pm 1) = \pm (4n + 3).$$

La série que donne u_1 à la surface est divergente; mais si l'on groupe les termes deux par deux, on la transforme en série convergente, et il est facile de voir que la somme des termes de la série ainsi transformée est la limite vers laquelle tend u_1 à mesure que $\frac{r}{r_1}$ se rapproche de l'unité. Cela résulte des théorèmes suivants, que je me contenterai d'énoncer.

1° Si les termes de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sont de même degré, dans la différence $\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur de deux unités.

2° La série qui a pour terme générale une fraction rationnelle $\frac{f(n)}{\varphi(n)}$, dont le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur de plus d'une unité, est convergente.

3° Quand la série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

(dont les termes présentent des signes alternatifs, décroissent constamment et ont pour limite zéro), convergente pour $x < a$, cesse de l'être pour $x = a$, et que les différences $u_0 - u_1$, $u_2 - u_3$,... forment encore pour $x = a$ une série convergente *dont les termes sont différents de zéro*, la somme de cette série est la limite vers laquelle tend celle de la première quand n se rapproche de a.

On obtient v_0 en faisant $\alpha = 0$ dans la seconde formule (17); $\frac{dP_{2n}(0)}{d\alpha}$ est nul; $\frac{dP_{2n+1}(0)}{d\alpha}$ est le coefficient du dernier terme de $P_{2n+1}(\alpha)$. On a donc

$$\frac{dP_{2n+1}(0)}{d\alpha} = (-1)^n \frac{3.5.7\dots(2n+1)}{(2n+3)(2n+5)\dots(4n+1)},$$

et, comme

$$\Pi_{2n+1} = \frac{3.5.7\dots(4n+3)}{1.2.3\dots(2n+1)},$$

$$\Pi_{2n+1}\frac{dP_{2n+1}(0)}{d\alpha} = (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n.1.2.3\dots n}(2n+1)(4n+3).$$

A la surface on a, en réunissant en une seule les deux fractions qui sont entre crochets dans la valeur générale de v,

$$v_0 = -\frac{5\varpi E r_1^2}{12}\left\{\frac{3}{5} + \sum_1^\infty \frac{(2n+1)(4n-5)(4n+3)}{2n[2(2n+1)(4n+5)+5]}\,\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n.1.2.3\dots n}\right\}.$$

On reconnaît, comme précédemment, que cette série est convergente; car, sans calculer complétement le numérateur de la pre-

mière fraction sous le signe S, on voit que son premier terme est négatif, de sorte que, au moins à partir d'une certaine valeur de n, la dérivée est négative et la fraction décroissante.

En général, la fraction

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$$

finit par être constamment croissante ou décroissante pour des valeurs positives de n suffisamment grandes, suivant que la quantité $ab' - ba'$ est positive ou négative.

Vu et approuvé :

Besançon, le 12 novembre 1869.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Ch. GRENIER.

Permis d'imprimer :

Besançon, le 12 novembre 1869.

Le Recteur,

B. CARÊME.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LE PROBLÈME INVERSE DES PERTURBATIONS.

En rapportant les observations de M. Galle, qui vérifiaient si exactement ses prévisions, M. Le Verrier (*) exprime l'espoir « qu'après trente ou quarante années d'observations de la nouvelle planète, on pourra l'employer à son tour à la découverte de celle qui la suit dans l'ordre des distances au Soleil, et ainsi de suite.... »

Déjà vingt-trois ans se sont écoulés, et je ne sache pas qu'on ait encore écrit le chapitre d'Astronomie dont son beau travail fournit les éléments. Je vais essayer d'en tracer l'esquisse d'après les Mémoires de M. Le Verrier et de son émule, M. Adams (**). On ne me reprochera pas ma brièveté si (malgré des lacunes inévitables, dont j'ai parfaitement conscience, et que la lecture des pièces originales pourra seule combler) elle ne nuit pas trop, comme je l'espère, à la clarté ni à la rigueur de l'exposition.

Dès 1821, Bouvard reconnaissait l'impossibilité de relier théoriquement les observations modernes d'Uranus et les anciennes avec l'exactitude qu'elles comportent. En conséquence, il crut devoir rejeter ces dernières; mais les tables, ainsi construites, ne tardèrent pas à se montrer inexactes, et en 1845 elles ne s'accordaient pas mieux avec les observations les plus récentes qu'avec les anciennes.

Une opinion, conçue d'abord par Bouvard et généralement ad-

(*) *Additions à la Connaissance des Temps pour* 1849, p. 294.

(**) *Appendix to the Nautical Almanac for the year* 1851.

mise par les Astronomes, attribuait ce désaccord aux perturbations produites par une planète inconnue; Bessel écrivait même à M. de Humboldt qu'on chercherait vainement ailleurs l'explication du mystère d'Uranus.

La recherche de cette planète hypothétique était donc une question à l'ordre du jour, lorsqu'en 1845 Arago conseilla vivement à M. Le Verrier de s'en occuper. Déjà, sans que personne le soupçonnât, M. Adams tentait de la résoudre.

Pour établir les conditions du nouvel astre sur des données certaines, il fallait d'abord reprendre le calcul des perturbations exercées sur Uranus par Saturne et par Jupiter; puis, assuré désormais de n'avoir rien négligé, comparer la théorie avec les observations et reconnaître l'impossibilité radicale de les accorder sans recourir à l'intervention d'une cause étrangère. C'est ce que M. Le Verrier a mis complétement hors de doute par une discussion dont la rigueur ne laisse rien à désirer; il n'entre pas dans mon plan de rendre compte de ce travail préliminaire, qui sert de base à tout le reste.

Je suppose donc prouvée l'impossibilité de représenter les observations d'Uranus en le regardant comme soumis uniquement aux perturbations produites par les planètes connues; j'admets, de plus, que la cause des inégalités observées soit une planète ignorée; cherchons si l'on peut, au moyen de ces irrégularités, assigner la place qu'elle occupe dans le ciel, sa masse et les éléments de son orbite.

Les inconnues de la question ne sont pas seulement la masse et les éléments de l'orbite de la planète hypothétique, mais encore les corrections des éléments d'Uranus, qui ne peuvent être exacts, puisqu'on les a déterminés sans tenir compte de l'action de cette planète.

Dans le problème direct, les éléments de l'orbite de l'astre perturbateur étant déjà connus avec une grande approximation, on peut calculer d'abord presque exactement les perturbations qu'il produit, puis déduire des petites différences qu'elles laissent subsister entre les lieux observés et calculés les corrections des éléments de l'orbite troublée; mais ici cette séparation de la question en deux n'est pas possible; il faut prendre, comme inconnues d'un même problème, et les éléments de la planète cherchée, et les corrections des élements d'Uranus.

L'inclinaison de l'orbite d'Uranus est très-petite, $46' \frac{1}{2}$, et n'a d'autres

inégalités sensibles que celles qui sont dues aux actions de Saturne et de Jupiter. On peut donc admettre, du moins dans une première approximation, que les plans des deux orbites se confondent avec l'écliptique; ce qui supprime du même coup deux inconnues, l'inclinaison de l'orbite et la longitude du nœud de la planète cherchée.

Puis, comme nous ne considérerons que la longitude d'Uranus, nous n'aurons à nous occuper que des variations de la longitude de l'époque ε, du moyen mouvement n, de l'excentricité e, et de la longitude ϖ du périhélie de cette planète.

Les inconnues de la question sont donc au nombre de neuf, quatre relatives à Uranus $\partial\varepsilon$, ∂n, ∂e, $\partial\varpi$, et cinq relatives à la planète cherchée, sa masse m' et les éléments ε', n', e', ϖ' de son orbite.

En calculant les variations de la longitude d'Uranus dues aux corrections de ses éléments, puis celles qui peuvent résulter de l'action de la planète inconnue, et égalant ensuite la somme à la longitude observée, moins la longitude calculée, nous aurons les équations du problème.

Variation de la longitude héliocentrique d'Uranus produite par la correction de ses éléments.

La longitude héliocentrique vraie d'Uranus est (*)

$$(1) \qquad v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5e^2}{4}\sin 2(nt + \varepsilon - \varpi) + \ldots.$$

Négligeons d'abord e^2, différentions par rapport aux constantes, et posons ensuite, pour abréger, l'anomalie moyenne à l'époque t

$$nt + \varepsilon - \varpi = \zeta.$$

Nous aurons

$$\partial v = \partial\varepsilon(1 + 2e\cos\zeta) + t\partial n(1 + 2e\cos\zeta) + 2\sin\zeta\,\partial e - 2\cos\zeta\, e\,\partial\varpi,$$

et, en omettant les termes très-petits en $e\partial\varepsilon$, $e\partial n$, l'expression beau-

(*) *Mécanique céleste*, t. I, p. 208.

coup plus simple

$$\delta v = \delta\varepsilon + t\delta n + 2\sin\zeta\,\delta e - 2\cos\zeta\, e\delta\varpi.$$

On peut conserver au second membre de l'équation qui donne δv cette forme qui abrége singulièrement, comme nous le verrons plus tard, les calculs numériques, en gardant e^2 dans v, sans rien négliger ensuite de ce que donne la différentiation; car l'équation (1), mise sous la forme

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin\zeta + \frac{5e^2}{4}\sin 2\zeta,$$

puis différentiée par rapport aux constantes, donne

$$\delta v = \delta\varepsilon + t\delta n + \left(2\sin\zeta + \frac{5e}{2}\sin 2\zeta\right)\delta e + \left(2\cos\zeta + \frac{5e}{2}\cos 2\zeta\right)e\delta\zeta,$$

qui peut s'écrire

$$\delta v = \delta\varepsilon + t\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 + \cos 2nt\,\delta x_2 + \sin 2nt\,\delta y_2,$$

en posant

$$\varepsilon - \varpi = \beta,$$

$$\delta x_1 = 2(\sin\beta\,\delta e + \cos\beta . e\delta\zeta),$$

$$\delta y_1 = 2(\cos\beta\,\delta e - \sin\beta . e\delta\zeta),$$

$$\delta x_2 = \frac{5e}{4}(\cos\beta\,\delta x_1 + \sin\beta\,\delta y_1),$$

$$\delta y_2 = -\frac{5e}{4}(\sin\beta\,\delta x_1 - \cos\beta\,\delta y_1).$$

Variation de la longitude d'Uranus produite par la planète inconnue.

Elle est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} = {} & \frac{1}{2}m'\Sigma P_i \sin i(n't - nt - \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + m'e\,\Sigma N_i \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ & + m'e'\Sigma M_i \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'],\end{aligned}$$

i devant prendre toutes les valeurs entières, positives et négatives, zéro excepté. J'ai calculé les expressions générales des coefficients sous la forme la mieux appropriée aux applications :

$$P_i = \frac{-\alpha}{i(1-\gamma)^2}\left[1+\frac{4}{(i-1-i\gamma)(i+1-i\gamma)}\right]b_i - \frac{2\alpha}{i(1-\gamma)(i-1-i\gamma)(i+1-i\gamma)}\,\alpha\frac{db_i}{d\alpha},$$

$$N_i = \frac{i(i-1)(i-2)-6-2i(i-1)^2\gamma+i^2(i-1)\gamma^2}{i(i-\gamma)^2(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)}\,\alpha.b_i + \frac{(i-1)[i^2(i+4)+12]-i[3i^2(i+2)-10i+12]\gamma+3i^2(i-1)(i+2)\gamma^2-i^4\gamma^3}{2i(1-\gamma)(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)^2(i+1-i\gamma)} \times\alpha\left[\frac{2}{1-\gamma}b_i+\alpha\frac{db_i}{d\alpha}\right]+\frac{\alpha}{i(1-\gamma)(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)}\alpha^2\frac{d^2b_i}{d\alpha^2},$$

$$M_i = -\frac{(i-1)(2i-1)[i(i-2)+4-2i(i-1)\gamma+i^2\gamma^2]}{2i(1-\gamma)(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)^2}\,\alpha.b_{i-1} - \frac{(i-1)[i(i+2)+4]-2i(i^2+1)\gamma+i^2(i-1)\gamma^2}{2i(1-\gamma)(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)^2}\,\alpha.\alpha\frac{db_{i-1}}{d\alpha} - \frac{\alpha}{i(1-\gamma)(i-2-i\gamma)(i-1-i\gamma)}\alpha^2\frac{d^2b_{i-1}}{d\alpha^2},$$

où

$$\frac{a}{a'}=\alpha,\quad \frac{n'}{n}=\alpha^{\frac{3}{2}}=\gamma.$$

Il faut avoir soin, quand on fait $i=1$, de diminuer b de α et $\frac{db}{d\alpha}$ de 1; b_i est défini par l'équation

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos\theta+b_2\cos 2\theta+\ldots;$$

et l'on a, en général (*),

$$b_i = 2\,\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\,\alpha^i\left[1+\frac{2i+1}{2i+2}\,\frac{1}{2}\,\alpha^2+\frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\,\frac{1.3}{2.4}\,\alpha^4+\ldots\right].$$

[*Voir*, pour le calcul de b_i et de ses dérivées, LAPLACE, *Mécanique céleste*, et M. LE VERRIER, *Théorie de Mercure* (**)].

(*) *Mécanique céleste*, t. V, p. 402.

(**) *Additions à la Connaissance des Temps pour* 1848. — *Annales de l'Observatoire*, t. III.

Les seuls termes dont il ait fallu tenir compte sont compris dans la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Omega = {} & m' P_1 \sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + m' P_2 \sin(2n't - 2nt + 2\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ & + m' P_3 \sin(3n't - 3nt + 3\varepsilon' - 3\varepsilon) \\ & + m' e N_1 \sin(n't + \varepsilon' - \varpi) \\ & + m' e N_2 \sin(2n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi) \\ & + m' e N_3 \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi) \\ & + m' e' M_1 \sin(n't + \varepsilon' - \varpi') \\ & + m' e' M_2 \sin(2n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi') \\ & + m' e' M_3 \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi')\end{aligned}$$

On peut négliger sans inconvénient les perturbations qui dépendent des autres arguments.

Équations du problème.

En appelant v la longitude d'Uranus calculée, moins la longitude observée à l'époque t, le type général des équations de condition dont nous ferons usage est

$$(2) \qquad \partial\varepsilon + t\partial n + 2\sin\zeta de - 2\cos\zeta e\partial\varpi + \Omega + v = 0,$$

si l'on néglige e^2 et les produits $e\partial\varepsilon$, $e\partial n$, comme l'a fait M. Le Verrier dans son premier essai de solution. Il faudrait remplacer le troisième et le quatrième terme par

$$\cos nt\partial x_1 + \sin nt\partial y_1 + \cos 2nt\partial x_2 + \sin 2nt\partial y_2,$$

si l'on voulait pousser l'approximation jusqu'aux termes en e^2. Enfin, si l'on jugeait nécessaire d'aller plus loin, comme M. Le Verrier dans sa solution la plus précise, les coefficients des variations des éléments d'Uranus auraient des valeurs très-complexes qu'il serait facile de calculer (*).

(*) *Voir* Le Verrier, *Théorie de Mercure.*

Suivant la marche qu'on donne au calcul, on met $\mathfrak{R}$ sous une forme ou sous une autre. Comprenant le facteur e dans N et posant

$$h' = e' \sin \varpi', \quad l' = e' \cos \varpi',$$

$$\mathrm{A} = \sum \mathrm{P}_i \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \sum \mathrm{N}_i \sin[i(n't - nt - \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon],$$

$$\mathrm{H} = -\sum \mathrm{M}_i \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon],$$

$$\mathrm{L} = -\sum \mathrm{M}_i \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon].$$

M. Le Verrier écrit

$$\mathfrak{R} = \mathrm{A}m' + \mathrm{H}m'h' + \mathrm{L}m'l'$$

et M. Adams

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = {} & h_1 \cos(n' - n)t + h_2 \cos 2(n' - n)t + h_3 \cos 3(n' - n)t \\ & + k_1 \sin(n' - n)t + k_2 \sin 2(n' - n)t + k_3 \sin 3(n' - n)t \\ & + p_1 \cos n't + p_2 \cos(2n' - n)t + p_3 \cos(3n' - n)t \\ & + q_1 \sin n't + q_2 \sin(2n' - n)t + q_3 \sin(3n' - n)t.\end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients sont les suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = m'\mathrm{P}_1 \sin\theta, \quad h_2 = m'\mathrm{P}_2 \sin 2\theta, \quad h_3 = m'\mathrm{P}_3 \sin 3\theta, \\ k_1 = m'\mathrm{P}_1 \cos\theta, \quad k_2 = m'\mathrm{P}_2 \cos 2\theta, \quad k_3 = m'\mathrm{P}_3 \cos 3\theta; \\ p_1 = m'e\mathrm{N}_1 \sin(\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_1 \sin(\theta + \beta'), \\ p_2 = m'e\mathrm{N}_2 \sin(2\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_2 \sin(2\theta + \beta'), \\ p_3 = m'e\mathrm{N}_3 \sin(3\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_3 \sin(3\theta + \beta'); \\ q_1 = m'e\mathrm{N}_1 \cos(\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_1 \cos(\theta + \beta'), \\ q_3 = m'e\mathrm{N}_2 \cos(2\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_2 \cos(2\theta + \beta'), \\ q_3 = m'e\mathrm{N}_3 \cos(3\theta + \beta) + m'e'\mathrm{M}_3 \cos(3\theta + \beta'), \end{array} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$\varepsilon' - \varepsilon = \theta, \quad \varepsilon - \varpi = \beta, \quad \varepsilon - \varpi' = \beta'.$$

Première solution approchée.

L'inconnue n' ou α ou γ entre dans les équations d'une manière si compliquée qu'on ne peut pas songer à l'en déduire directement. Heureusement la loi de Bode nous fait regarder comme très-probable que le rapport $\frac{a}{a'}$ ne s'écarte pas beaucoup de $\frac{1}{2}$ (ses valeurs extrêmes pour deux planètes consécutives sont 0,496 et 0,720, dont la moyenne est 0,608), et des considérations tirées des effets que l'astre inconnu doit produire rendent cette prévision encore plus probable; de sorte que nous pouvons raisonnablement espérer qu'en supposant d'abord $\alpha = \frac{1}{2}$, nous trouverons pour les autres inconnues des valeurs, sinon exactes, du moins approchées, que nous pourrons rectifier ensuite.

n' étant connu quand α est donné, $\mathfrak{R}$ ne contient plus d'autres inconnues que $m', \varepsilon', e', \varpi'$ ou m', ε', h', l'. Pour les obtenir, il faut d'abord éliminer les corrections des éléments d'Uranus.

Méthode de M. Le Verrier. — Voici pour cela une méthode très-simple. Écrivons l'équation (2) pour huit époques équidistantes d'une quantité τ égale à un certain nombre de révolutions synodiques d'Uranus, afin de pouvoir n'employer que des observations faites vers les oppositions (*), nous formerons ainsi huit équations qui se déduisent de la suivante :

$$\delta\varepsilon + i\tau\delta n + 2\sin(\zeta + in\tau)\delta e - 2\cos(\zeta + in\tau)e\delta\varpi + \mathfrak{R}_{i+1} + v_{i+1} = 0,$$

en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 7$. Nous éliminerons $\delta\varepsilon$ en prenant les différences premières, et δn en prenant les différences secondes; nous tomberons ainsi sur six équations de la forme

$$-8\sin^2\frac{n\tau}{2}\sin(\zeta+in\tau)\delta e+8\sin^2\frac{n\tau}{2}\cos(\zeta+in\tau)e\,\delta\varpi+\delta^2\mathfrak{R}_i+\delta^2 v_i=0,$$

(*) On s'affranchit par là des erreurs provenant de l'inexactitude du rayon vecteur d'Uranus.

qu'on obtiendrait en faisant $i = 1, 2, \ldots, 6$. Choisissons τ de sorte que $n\tau = 60^\circ$; il suffit pour cela de prendre $\tau = 14$ ans environ : alors $3n\tau = 180^\circ$, et si l'on ajoute les équations correspondantes à des valeurs de i différant de trois unités, savoir : 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, ∂e et $e\partial\varpi$ disparaissent, et on a les trois équations

$$\partial^2\mathfrak{R}_1 + \partial^2\mathfrak{R}_4 + \partial^2 v_1 + \partial^2 v_4 = 0,$$
$$\partial^2\mathfrak{R}_2 + \partial^2\mathfrak{R}_5 + \partial^2 v_2 + \partial^2 v_5 = 0,$$
$$\partial^2\mathfrak{R}_3 + \partial^2\mathfrak{R}_6 + \partial^2 v_3 + \partial_2 v_6 = 0,$$

qui feront connaître m', $m'h'$, $m'l'$ quand on connaîtra ε'. Les deux derniers termes sont des nombres fournis par la comparaison des lieux observés et calculés; la somme des deux premiers s'obtiendra facilement en remarquant que

$$\mathfrak{R} = \sum \mathrm{K} \sin(k\tau + \gamma),$$

et, par suite,

$$\partial^2\mathfrak{R}_i + \partial^2\mathfrak{R}_{i+3} = -\,8\sum \mathrm{K} \sin^2\frac{k\tau}{2}\cos\frac{3k\tau}{2}\sin\left[\frac{(2i+5)k\tau}{2} + \gamma\right].$$

Quand on aura m', $m'h'$, $m'l'$, deux différences secondes donneront ∂e et $e\partial\varpi$; puis on aura des équations propres à déterminer $\partial\varepsilon$ et ∂n en ajoutant la première et la quatrième, la deuxième et la cinquième des équations primitives; ce qui fera disparaître les termes en ∂e, $\varepsilon\partial\varpi$.

Mais comment avoir ε'? Pour cela, M. Le Verrier a recours à des essais successifs. Il donne à cette quantité diverses valeurs équidistantes, pour chacune desquelles il calcule celles des autres inconnues, et, les portant dans l'une des équations primitives, la huitième par exemple, il obtient des nombres dont la marche fait connaître la valeur de ε' qui convient à la question.

Malheureusement en appliquant cette méthode, il reconnaît que les coefficients de l'équation qui donne m' sont tellements petits qu'on ne peut pas compter sur la valeur qu'on en tire pour cette inconnue, à cause de l'influence des erreurs dont les coefficients sont affectés.

On pourrait croire que cette difficulté tient à l'emploi de la méthode des différences; mais si l'on abandonne les avantages qu'elle offre pour faciliter l'élimination afin de pouvoir se servir d'équations de condition dont les coefficients sont calculés avec toute la rigueur possible, le même inconvénient persiste, au point de donner une masse négative correspondant à la seule valeur admissible de ε', ce qui pourrait faire croire que le problème est impossible.

On sera exposé à de pareils mécomptes toutes les fois qu'on voudra traiter une question de physique comme un problème d'algèbre pure, et que l'on combinera des équations imparfaites comme si elles étaient exactes, sans prendre les précautions nécessaires pour atténuer autant que possible l'effet des erreurs.

Pour sortir d'embarras sans changer de méthode, M. Le Verrier a dû introduire dans le calcul les erreurs d'observation comme de nouvelles indéterminées. Il a tiré les corrections des éléments d'Uranus des équations correspondantes aux observations de 1715, 1775, 1810, 1845, en fonction de P, Q, R, S, qui représentent à chaque époque la somme des perturbations et de l'erreur d'observation. Puis il a substitué les valeurs ainsi obtenues dans les équations relatives aux époques 1690,98; 1712,15; 1715,23; 1747,7; 1754,7;...; 1845,7, distantes de sept années à partir de 1747. Remarquant que les résultats correspondant aux quatre époques 1817, 1824, 1831 et 1838 avaient sensiblement la même signification, il les a ajoutés, et a formé ainsi la première des trois équations moyennes propres à déterminer m', $m'h'$, $m'l'$ en fonction de ε'. Les quatre équations correspondant à 1782, 1789, 1796 et 1803, étant dans le même cas que les précédentes, ont fourni de même la seconde des équations dont on a besoin. Pour obtenir la troisième, il a ajouté les équations correspondant à 1747, 1754, 1761 et 1768.

Ensuite il a tiré des deux dernières les valeurs de $m'h'$, $m'l'$ en fonction de m' et des erreurs inconnues P' et Q' des observations de 1715 et de 1775 (les autres erreurs étant regardées comme négligeables), pour toutes les valeurs de ε' de 9 degrés en 9 degrés, de 0 à 360 degrés. Enfin il a porté ces valeurs dans les équations de condition relatives aux observations de 1690 et 1747,..., 1768, les seules qui ne soient pas sensiblement identiques.

Une discussion minutieuse lui a montré l'impossibilité d'y satisfaire par des valeurs admissibles de m', P', Q', à moins de supposer ε' voisin de 252 degrés au 1er janvier 1800.

Méthode de M. Adams. — M. Adams n'a pas rencontré les mêmes difficultés que M. Le Verrier, parce qu'il a tout de suite fait usage de la méthode des moindres carrés.

Comme ses calculs portent des traces évidentes d'additions et de corrections successives, afin d'en bien saisir l'esprit, il convient de les réduire d'abord à ce qu'ils devaient être dans son premier essai de solution, lorsque, supposant l'orbite de la planète inconnue circulaire, il pouvait négliger bien des termes dont il a dû tenir compte ensuite.

Si l'on néglige δx_2 et δy_2, ainsi que les p et q, les équations de condition dont il a fait usage se réduisent à la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & v + \delta\varepsilon + t\,\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 \\ & + h_1\cos(n'-n)t + h_2\cos 2(n'-n)t + h_3\cos 3(n'-n)t \\ & + k_1\sin(n'-n)t + k_2\sin 2(n'-n)t + k_3\sin 3(n'-n)t. \end{aligned}\right.$$

Prenant pour origine du temps l'époque de l'opposition moyenne d'Uranus en 1810, savoir : 1810,328, et pour unité la durée de trois révolutions synodiques de cette planète égale à 3,362 années, écrivons l'équation précédente pour toutes les époques correspondantes aux valeurs de t, de -10 à $+10$ (0 compris).

Nous formerons les équations finales qui doivent donner les corrections des éléments d'Uranus, en multipliant chacune des premières par le coefficient de $\delta\varepsilon$ dans cette équation, puis ajoutant entre eux les résultats ainsi obtenus, ce qui donnera une équation propre à déterminer $\delta\varepsilon$; de même pour δn, δx_1, δy_1. Opérons de la même manière par rapport à h_1, h_2, h_3; k_1, k_2, k_3.

Les équations ainsi formées se séparent naturellement en deux groupes dont le premier contient seulement $\delta\varepsilon$, δx_1, h_1, h_2, h_3, et le second δn, δy_1, k_1, k_2, k_3. Cela tient à ce que les sinus de deux arcs égaux et de signe contraire sont eux-mêmes égaux et de signe contraire et leurs cosinus égaux et de même signe. On calcule facilement les

coefficients de ces équations au moyen des formules suivantes, en faisant $t = 10$ dans leurs seconds membres :

$$\sum \cos mt = \frac{\sin m\,(t+\frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2} m},$$

$$\sum t \sin mt = \frac{(t+1)\sin mt - t \sin m\,(t+1)}{2 \sin^2 \frac{1}{2} m},$$

$$\sum \cos mt \cos nt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2}(m-n)} + \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2}(m+n)}\right],$$

$$\sum \sin mt \sin nt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2}(m-n)} - \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2}(m+n)}\right],$$

$$\sum \cos^2 mt = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m},$$

$$\sum \sin^2 mt = t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m}.$$

Désignons les équations du premier groupe par

$$(\varepsilon),\quad (x),\quad (h_1),\quad (h_2),\quad (h_3),$$

du nom des quantités auxquelles elles se rapportent. Au moyen de (ε), éliminons $\partial\varepsilon$ de chacune des autres ; celles-ci deviennent

$$(x)',\quad (h_1)',\quad (h_2)',\quad (h_3)'.$$

De même, au moyen de $(x)'$, éliminons ∂x_1 de chacune de celles-ci, ce qui donne

$$(h_1)'',\quad (h_2)'',\quad (h_3)''.$$

Pareillement les équations du second groupe étant

$$(n),\quad (y),\quad (k_1),\quad (k_2),\quad (k_3);$$

au moyen de (n), éliminons ∂n de chacune des autres, nous aurons

$$(y)',\quad (k_1)',\quad (k_2)',\quad (k_3)',$$

dont les trois dernières, après l'élimination de ∂y au moyen de $(y)'$ deviendront

$$(k_1)'',\quad (k_2)'',\quad (k_3)''.$$

On remarque que les trois équations qui restent dans chaque groupe après l'élimination des corrections des éléments d'Uranus ne diffèrent pas sensiblement, et que, par conséquent, on peut former deux équations finales en les ajoutant simplement membre à membre, après avoir fait en sorte que les coefficients des inconnues aient le même signe dans toutes. On obtient ainsi les deux équations

$$(A) \qquad ah_1 + bh_2 + ch_3 = d,$$

$$(B) \qquad a'k_1 + b'k_2 + c'k_3 = d',$$

qui suffisent pour déterminer la masse m' de la planète et la longitude ε' de l'époque. Car en éliminant le terme constant entre les deux, m' disparaît comme facteur commun, de sorte que l'équation résultante ne contient plus d'autre inconnue que ε' ou θ.

J'ai formé cette équation où le sinus et le cosinus des arcs θ, 2θ, 3θ entrent linéairement. Elle se résout rapidement par des substitutions; mais elle a, dans l'intervalle de 0 à 2π, six racines : une dans le premier quadrant, deux dans le second, deux dans le troisième et une dans le quatrième. Elle ne peut pas en avoir davantage; car si on la rend algébrique en posant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = z$, le résultat est seulement du sixième degré.

Si, pour chacune de ces racines, on calcule les $\frac{h}{m'}$, $\frac{k}{m'}$ au moyen des équations (3), et qu'ensuite on tire m' de l'une des équations (A), (B), les cinq premières racines sont écartées par la valeur correspondante de la masse qui est, ou négative, ou trop petite pour rendre compte des inégalités observées, et la sixième conduit, pour la longitude de la planète au 1er janvier 1847, à un nombre qui, si je ne me suis pas trompé, ne diffère pas trop du résultat trouvé par M. Le Verrier.

C'est évidemment de cette manière que M. Adams a dû obtenir en 1843 sa première solution, dans laquelle il supposait l'orbite circulaire, et dont il ne rapporte pas les résultats, sans doute parce qu'elle laissait subsister entre la théorie et l'observation des différences qui lui auront paru encore trop grandes.

Cette première solution était fondée uniquement sur les observations modernes qui n'embrassent pas un intervalle de temps assez

long pour mettre bien en évidence l'ellipticité de l'orbite de la planète cherchée. Pour déterminer l'excentricité et la longitude du périhélie, il faut faire intervenir les observations anciennes et tenir compte de δx_2, δy_2 et des p et q que nous avons négligés dans la première hypothèse.

Par l'introduction de ces quantités dans les équations, l'élimination des éléments d'Uranus est un pen plus compliquée; mais pas autant qu'on pourrait le croire; car, étant affectées de très-petits coefficients, elles n'ont pas besoin d'être traitées avec la même rigueur que les autres.

Écrivons l'équation (4) pour chacune des observations anciennes; de chacune de ces équations éliminons, comme précédemment, δn, $\delta \varepsilon$, δx, δy, au moyen des équations (n), (ε), (x), (y) relatives aux observations modernes dont nous avons expliqué la formation, mais qui contiennent maintenant δx_2, δy_2, ainsi que les p et q.

Les plus grands termes dépendant de l'excentricité et de la longitude du périhélie se trouvent dans p_3 et q_3; cela ressort évidemment de la comparaison des nombres

$$M_1 = -43'', \quad M_2 = +122'', \quad M_3 = +930''.$$

Il convient donc de combiner les équations que nous venons d'obtenir de manière à faire acquérir à p_3 et q_3 les plus grands coefficients possibles. Pour cela, on les ajoutera membre à membre après les avoir multipliées par des quantités sensiblement proportionnelles aux coefficients de p_3 et q_3 dans chacune d'elles; on obtient ainsi deux équations de la forme

$$\begin{aligned} g = a\delta x_2 + b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 \\ + c\delta y_2 + d_1 k_1 + d_2 k_2 + d_3 k_3 \\ + e_1 p_1 + e_2 p_2 + e_3 p_3 \\ + f_1 q_1 + f_2 q_2 + f_3 q_3. \end{aligned}$$

Éliminant δx_2 et δy_2 de ces équations au moyen de $(x)'$, $(y)'$ et des valeurs de δx_2 et δy_2 en δx_1 et δy_1, nous aurons deux équations (C) et (D) indépendantes des corrections des éléments d'Uranus, qui,

jointes aux deux équations semblables (A) et (B) fournies par les observations modernes, suffisent pour la solution du problème.

Ces quatre équations sont de la forme

$$e = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3.$$

En éliminant le terme constant des équations (B), (C), (D) au moyen de (A), on a trois équations qui ne dépendent plus que de ε', e, ϖ', car m' disparaît comme facteur commun. Si l'on y remplace p_1, p_2, q_1, q_2 par leurs valeurs en p_3 et q_3 obtenues au moyen des équations (3)

$$p_1 = m'e\left(N_1 - \frac{M_1 N_3}{M_3}\right)\sin(\theta + \beta) + \frac{M_1}{M_3}(p_3 \cos 2\theta - q_3 \sin 2\theta),$$

$$q_1 = m'e\left(N_1 - \frac{M_1 N_3}{M_3}\right)\cos(\theta + \beta) + \frac{M_1}{M_3}(p_3 \sin 2\theta + q_3 \cos 2\theta),$$

$$p_2 = m'e\left(N_2 - \frac{M_2 N_3}{M_3}\right)\sin(2\theta + \beta) + \frac{M_2}{M_3}(p_3 \cos\theta - q_3 \sin\theta),$$

$$q_2 = m'e\left(N_2 - \frac{M_2 N_3}{M_3}\right)\cos(2\theta + \beta) + \frac{M_2}{M_3}(p_3 \sin\theta + q_3 \cos\theta).$$

e', ϖ' n'y entrent plus que par p_3 et q_3, dont les coefficients sont très-petits, surtout dans la première, qui provient des observations modernes; en les négligeant, on obtient une équation en θ seulement, d'où l'on tire pour cette quantité une première valeur approchée, et en la substituant dans les deux autres des valeurs approchées de $\frac{p_3}{m'}, \frac{q_3}{m'}$. Ces deux derniers nombres, portés à leur tour dans la première équation, permettront d'en tirer une valeur plus exacte de θ, et, en répétant l'opération, on satisfera à ces équations aussi exactement qu'on voudra.

Ayant ainsi les valeurs numériques de θ et $\frac{p_3}{m'}, \frac{q_3}{m'}$, on les substituera dans les expressions analytiques (3) des deux dernières quantités, et on aura ainsi deux équations d'où l'on déduira e' et β' ou ϖ', qui, substitués dans (A), feront connaître m'.

Solution plus précise.

Connaissant déjà avec une certaine approximation les éléments de la planète inconnue, on peut en trouver des valeurs plus exactes par la méthode suivante due à M. Le Verrier. Si l'on pose

$$\varepsilon' = 252^\circ + 18^\circ\beta,$$

$$\frac{a}{a'} = 0{,}6 + 0{,}12\gamma\ (*),$$

on peut admettre que β et γ sont assez petits pour qu'on puisse développer suivant leurs puissances les expressions des perturbations, les valeurs des éléments de l'orbite, ainsi que la longitude vraie de la planète cherchée, et négliger les termes de degré supérieur au second.

On fera ces développements, non au moyen de la série Taylor, mais par la méthode des coefficients indéterminés, ce qui est beaucoup plus simple. On calculera directement les valeurs de la quantité dont on veut avoir le développement réduit à six termes, pour six hypothèses telles que les suivantes :

$$\begin{cases}\gamma = -1,\\ \beta = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma = 0,\\ \beta = -1;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma = 0,\\ \beta = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma = 0,\\ \beta = 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma = 1,\\ \beta = -1;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma = 1,\\ \beta = 0.\end{cases}$$

Ces six valeurs particulières donneront les coefficients du développement par la résolution d'équations du premier degré.

Au moyen des valeurs de b_i et de ses dérivées dans les trois hypothèses relatives à γ, on formera d'abord les expressions des coefficients A, H, L de

$$\mathfrak{R} = \mathrm{A}m' + \mathrm{H}m'h' + \mathrm{L}m'l'$$

aux époques des observations; puis on portera ces valeurs dans les équations de condition correspondantes; mais, comme elles sont trop

---

(*) M. Le Verrier prend $\frac{a}{a'} = 0{,}51 + 0{,}02\gamma$. On verra plus loin pourquoi j'ai dû changer ces nombres.

nombreuses, on les remplacera par un nombre moindre de conditions moyennes répondant chacune à un petit nombre d'observations peu distantes. M. Le Verrier a formé trente-trois semblables équations moyennes, telles que

$$a\partial\varepsilon + b\partial n + c\partial e + de\partial\varpi + \mathrm{A}m' + \mathrm{H}m'h' + \mathrm{L}m'l' + v = 0,$$

dans chacune des six hypothèses précédentes. Des équations relatives à chaque hypothèse il a déduit les valeurs des six quantités $\partial\varepsilon$, ∂n, ∂e, $e\partial\varpi$, $m'h'$, $m'l'$ en fonction de m', en se conformant sinon à la lettre, du moins à l'esprit de la méthode des moindres carrés. Ainsi, pour former l'équation en $\partial\varepsilon$, il a ajouté les trente-trois équations de condition multipliées par des nombres compris entre 0 et 10, sensiblement proportionnels au produit du coefficient de $\partial\varepsilon$ dans chaque équation par le nombre des observations sur lesquelles elle est fondée, et par le coefficient qui exprime l'exactitude relative qu'il attribue à ces observations. De même pour $\partial n, \ldots$; c'est ainsi qu'il a formé dans chaque hypothèse les six équations finales qui donnent $\partial\varepsilon$, ∂n, ∂e, $e\partial\varpi$, $m'h'$, $m'l'$ en fonction de m'.

Les valeurs de ces inconnues, dans chacune des six hypothèses que nous avons faites, étant substituées dans les premiers membres des trente-trois équations de condition, chacun d'eux fournit six résultats de la forme

$$\mathrm{A} + m'\mathrm{B},$$

dont l'ensemble peut être représenté, pour chaque équation de condition, par une fonction entière et du second degré :

$$a + b\beta + c\gamma + d\beta^2 + e\beta\gamma + f\gamma^2 + m'(a' + b'\beta + c'\gamma + d'\beta^2 + e'\beta\gamma + f'\gamma^2).$$

Les coefficients sont faciles à obtenir au moyen des six valeurs particulières qu'on connaît pour chaque polynôme.

En égalant à zéro les trente-trois polynômes ainsi formés, on a les équations dont on déduit les valeurs les plus précises de β, γ, m' en employant encore la méthode des moindres carrés.

Il faut pour cela former la somme Σ des carrés des premiers membres des équations précédentes. Rigoureusement, c'est un polynôme du quatrième degré; on peut le réduire au second et calculer les coeffi-

cients au moyen des valeurs particulières que prend Σ dans six hypothèses. C'est ainsi qu'on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma = \quad & a\beta^2 + b\beta\gamma + c\gamma^2 + d\beta + e\gamma + f,\\ & + m'(a'\beta^2 + b'\beta\gamma + c'\gamma^2 + d'\beta + e'\gamma + f'),\\ & + m'^2(a''\beta^2 + b''\beta\gamma + c''\gamma^2 + d''\beta + e''\gamma + f'').\end{aligned}$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à β, γ, m' et qu'on égale les résultats à zéro, conformément à la méthode des moindres carrés, on a les trois équations suivantes pour déterminer les valeurs de ces quantités, qui satisfont le mieux à la question

$$\begin{aligned}& 2a\beta + b\gamma + d + m'(2a'\beta + b'\gamma + d')\\ & \qquad + m'^2(2a''\beta + b''\gamma + d'') = 0,\\ & b\beta + 2c\gamma + e + m'(b'\beta + 2c'\gamma + e')\\ & \qquad + m'^2(b''\beta + 2c''\gamma + e'') = 0,\\ & a'\beta^2 + b'\beta\gamma + c'\gamma^2 + d'\beta + e'\gamma + d'\\ & \quad + 2m'(a''\beta^2 + b''\beta\gamma + c''\gamma^2 + d''\beta + e''\gamma + f'') = 0.\end{aligned}$$

Attribuons à m' diverses valeurs; les deux premières équations qui sont linéaires en β, γ, donneront facilement pour ces deux quantités des nombres qui, substitués dans la troisième, conduiront à des résultats dont la marche fera connaître la valeur de m', qui rend nul le premier membre. Et m' étant connu, la résolution des deux premières équations donnera β et γ.

Les valeurs particulières de $m'h'$, $m'l'$, calculées précédemment, et qui sont de la forme $a + bm'$, conduisent de même à des expressions générales

$$h' = f(\beta, \gamma) + \frac{1}{m'}\varphi(\beta, \gamma),$$

$$l' = f_1(\beta, \gamma) + \frac{1}{m'}\varphi_1(\beta, \gamma),$$

où les lettres f et φ désignent des polynômes du second degré. Ces formules donnent h' et l' dès qu'on a m', β, γ. Puis h' et l' étant connus, on

en déduit e' et ϖ' au moyen des équations

$$e' \sin \varpi' = h',$$
$$e' \cos \varpi' = l'.$$

Enfin, la longitude vraie de la planète à l'époque t est donnée par la formule

$$v' = n' t + \varepsilon' + 2 e' \sin (n' t + \varepsilon' - \varpi').$$

Il est facile de voir, d'après les deux dernières équations et les expressions de h', l' est β et γ, et que celle de v' sera de la forme

$$v' = f(\beta, \gamma) + \frac{1}{m'} \varphi(\beta, \gamma),$$

et on calculera encore les coefficients de f et φ au moyen des valeurs particulières de v' dans six hypothèses.

Recherche des limites extrêmes entre lesquelles la planète inconnue est comprise.

Nous avons mis nos équations de condition sous la forme

$$f(\beta, \gamma) + m' \varphi(\beta, \gamma) = 0.$$

Pour chaque valeur de $\frac{a}{a'}$, ou γ, leurs premiers membres sont seulement fonctions de β, de sorte qu'on peut les écrire ainsi

$$f(\beta) + m' \varphi(\beta) = 0.$$

Il y a une valeur de β qui satisfait le mieux possible à toutes ces équations. Cherchons de combien on peut la faire varier dans un sens ou dans l'autre sans que le premier membre d'aucune de ces équations atteigne la limite qu'il ne doit pas dépasser pour que l'observation correspondante soit représentée avec le degré d'exactitude qu'elle comporte.

A cet effet donnons à β diverses valeurs, et pour chacune de ces

valeurs et chacune des équations de condition, posons les deux inégalités

$$f(\beta) + m'\varphi(\beta) < h'',$$
$$f(\beta) + m'\varphi(\beta) > -h'';$$

l'une d'elles donnera pour m' un maximum, et l'autre un minimum. On écartera les valeurs de β qui donnent pour la masse deux limites contradictoires, ou un maximum négatif, ou un minimum trop grand [3 ou 4 unités (*), sans quoi la planète inconnue produirait dans le mouvement de Saturne des irrégularités considérables qu'on n'observe pas].

Les valeurs admissibles de β sont ainsi resserrées dans un certain intervalle. Pour chaque valeur de β comprise dans cet intervalle, prenons la plus grande et la plus petite valeur de m' que les inégalités précédentes rendent acceptable, la formule

$$\omega' = f(\beta) + \frac{1}{m'}\varphi(\beta)$$

déterminera pour ω' deux valeurs extrêmes. La plus grande parmi les plus grandes et la plus petite parmi les plus petites sont les limites entre lesquelles la planète serait nécessairement située si γ avait la valeur que nous lui avons attribuée.

Faisons maintenant varier γ dans un sens et dans l'autre, tant que l'une ou l'autre de nos équations de condition ne nous forcera pas de nous arrêter. A chaque valeur possible de γ répondront pour ω' deux limites semblables : la plus basse des limites inférieures et la plus élevée des limites inférieures sont celles hors desquelles la planète ne peut pas se trouver.

Toutefois, la légitimité de cette conclusion est subordonnée à la condition que la planète ne puisse pas sortir de l'intervalle dans lequel les formules d'interpolation dont nous avons fait usage sont exactes; sans cela, on pourrait être conduit à des résultats erronés.

C'est ce qui est arrivé à M. Le Verrier; il avait cru pouvoir affirmer

---

(*) L'unité étant la dix-millième partie de la masse du Soleil.

que le rapport des distances d'Uranus et de la planète cherchée était nécessairement compris entre 0,5062 et 0,5475, tandis qu'il est en réalité égal à 0,638. Cela tient à ce que la quantité γ, dont il a négligé les puissances supérieures à la seconde, pouvait s'élever, contrairement à ses prévisions, dont j'ignore le fondement, jusqu'à 6,4. Il aurait pu concevoir quelques doutes sur l'exactitude de ses résultats s'il avait remarqué que la limite supérieure qu'il a trouvée pour α sort déjà de l'intervalle dans lequel les développements dont il a fait usage sont légitimes, puisqu'elle répond à $\gamma = 2$ environ (plus exactement 1,875).

Et comme il n'est guère possible de savoir *à priori* quels coefficients il faut donner à β et γ, pour être sûr que ces variables ne dépasseront pas les valeurs pour lesquelles les formules d'interpolation cessent d'être exactes, il me paraît difficile de trouver du premier coup les limites entre lesquelles la planète perturbatrice est nécessairement comprise. On n'y parviendra que si β et γ se trouvent avoir des coefficients tels, que les limites extrêmes de ces variables soient notablement inférieures à l'unité; sinon il faudra recommencer en augmentant les coefficients.

Je terminerai par une question que tout le monde a dû se poser : Comment se fait-il qu'en supposant la distance de la planète au Soleil trop forte de $\frac{1}{5}$, ce qui a donné une masse 2 fois, une excentricité 12 fois trop considérable, et pour la longitude du périhélie une valeur trop faible de 70 degrés, on ait pu prédire la position de la planète à 1 degré près?

A cela je ne trouve qu'une réponse : c'est que, dans ce succès, comme dans tous les autres, le hasard, l'imprévu revendiquent leur part. Car, si la longitude de la planète au 1er janvier 1847 est exacte à 1 degré près, pour le 1er janvier 1800 elle est en erreur de 22 degrés. Et en remontant plus haut, sans sortir de l'intervalle auquel les calculs se rapportent, on trouve des différences plus grandes encore, ainsi 27 degrés, si je ne me trompe, en 1780.

J'admets que la planète réelle et celle dont le calcul a donné *à priori* les éléments ont dû avoir même longitude à une certaine époque comprise dans l'intervalle des observations dont on a fait usage, et même si l'on veut entre 1781 et 1845, parce que, dans cette période, les observations sont plus nombreuses et plus exactes. Mais en s'éloi-

gnant de l'époque de la conjonction, dans un sens ou dans l'autre, on voit les deux astres s'écarter de plus en plus d'environ $\frac{1}{2}$ degré par an, sauf l'effet de l'équation du centre.

La rencontre a lieu à la fin de la période, vers 1847; pourquoi pas au commencement, en 1781, ou tout au moins au milieu, vers 1815? Quelle cause inaperçue a pu la faire arriver justement à l'époque la plus favorable à l'exactitude de la prédiction?

De là je conclus que, si jamais les inégalités du mouvement de Neptune révèlent l'existence d'une planète située au delà, et qu'on se hasarde à en prédire la position, il serait téméraire de compter sur un succès pareil à celui qui a été obtenu en 1846, même en assignant à sa distance au Soleil des limites plus convenables.

La précision des résultats s'obtient, comme l'atteste toute l'histoire de l'Astronomie, non point tout d'un coup, mais par une série d'approximations successives et avec le concours du temps : il ne faut pas qu'un accident heureux le fasse oublier.

Vu et approuvé :

Besançon, le 12 novembre 1869.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Ch. GRENIER.

Permis d'imprimer :

Besançon, le 12 novembre 1869.

Le Recteur,

B. CARESME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

PARIS.—IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.